

COURS DE PHYSIQUE

ÉLECTROMAGNÉTISME - *Partie II*


JIMMY ROUSSEL

2026

Cours d'électromagnétisme - Partie II – femto-physique.fr

JIMMY ROUSSEL, professeur agrégé à l'Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Rennes

Copyright © 2026 Jimmy Roussel

 Ce document est sous licence *Creative Commons* «Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 4.0 International (CC BY-NC 4.0)».

Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Ce document est réalisé avec l'aide de *KOMA-Script* et \LaTeX en utilisant la classe *kaobook*.

1^{re} édition – Nov. 2015

Version en ligne – femto-physique.fr/electromagnetisme

Préface

Ce document est la deuxième partie du cours d'électromagnétisme que vous pouvez trouver sur femto-physique.fr. Il s'agit ici de présenter la théorie de Maxwell qui unifie les théories électrique et magnétique en une seule et met en avant le concept de *champ électromagnétique*. Nous détaillons notamment le phénomène d'induction et l'interprétation des équations de Maxwell, dont une conséquence importante est l'existence d'ondes électromagnétiques dans le vide.

Ce cours s'adresse plus particulièrement à des étudiants de premier cycle universitaire ou élèves des CPGE. Les candidats au CAPES ou à l'Agrégation peuvent y trouver également matière à réflexion.

Jimmy Roussel

Table des matières

Preface	iii
Table des matières	v
1 PROPRIÉTÉS LOCALES DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE	1
1.1 Théorème de Gauss	1
1.2 Circulation du champ électrostatique	8
1.3 Potentiel électrique	12
1.4 Énergie électrostatique	18
2 PROPRIÉTÉS DU CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE	23
2.1 Théorème d'Ampère	23
2.2 Flux du champ magnétostatique	27
2.3 Potentiel vecteur	29
2.4 Relations de passage du champ magnétique	33
2.5 Résumé	37
3 INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE	39
3.1 Approche historique	39
3.2 Origine de l'induction de Lorentz	44
3.3 Induction de Neumann	49
3.4 Bilan et discussions	52
4 ÉQUATIONS DE MAXWELL	55
4.1 Lois générales de l'électromagnétisme	55
4.2 Résolution des équations de Maxwell	59
5 LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE	63
5.1 Propagation du champ dans le vide	63
5.2 Propagation unidimensionnelle	67
5.3 Polarisation	71
ANNEXES	77
A Calcul numérique de l'inductance d'une bobine	79
A.1 Couplage entre deux spires	79
A.2 Applications aux solénoïdes	82
Pour en savoir plus	85
Grandeurs physiques et symboles mathématiques	87

Table des figures

1.1	Le flux du champ électrique à travers S est nul ici.	1
1.2	Le flux est-il toujours nul?	2
1.3	Le flux à travers une surface fermée est nul si la charge est à l'extérieur	2
1.4	Le flux du champ électrique à travers S est le même que celui à travers S'	2
1.5	Fil rectiligne infini et uniformément chargé de densité linéique λ	4
1.6	Calcul du flux à travers un cylindre fermé.	4
1.7	Calcul du flux à travers un cube.	5
1.8	Flux à travers deux cubes adjacents	5
1.9	Interface chargée séparant deux milieux différents notés 1 et 2.	7
1.10	Nappe d'épaisseur $2a$, chargée uniformément en volume.	8
1.11	Evolution du champ électrique $E(x)$	8
1.12	Circulation du champ électrique le long d'un circuit fermé orienté.	9
1.13	Circulation le long d'un carré orienté d'arête a	10
1.14	2 contours cote à côte.	10
1.15	Théorème de Stokes	11
1.16	Contour rectangulaire coupant la surface chargée perpendiculairement.	12
1.17	Boule de rayon a , uniformément chargée.	14
1.18	Cavité dans un conducteur chargé à l'équilibre.	16
1.19	Méthode des images électriques	16
1.20	Influence d'une charge sur une plaque conductrice	17
1.21	Distribution de N charges ponctuelles.	18
1.22	Distribution formée de deux corps chargés.	21
2.1	Flux électrique.	23
2.2	Notations associées à la loi de Biot et Savart.	23
2.4	Fil infini rectiligne parcouru par un courant électrique permanent.	24
2.5	Circulation du champ magnétique à travers un circuit C orienté.	24
2.3	Tube de courant élémentaire	24
2.8	Circulation à calculer	25
2.6	Différents enlacements	25
2.7	Le courant enlacé est compté positivement ici.	25
2.9	Calcul du courant enlacé en termes de densité de courant.	26
2.10	Conducteur cylindrique parcouru par un courant axial.	26
2.11	Le flux magnétique ne dépend que du contour C et du champ magnétique.	28
2.12	Fil conducteur rectiligne de section non négligeable.	31
2.13	Nappe de courant.	33
2.14	Contour rectangulaire coupant une nappe de courant.	34
2.15	Solénoïde infini.	35
2.16	Enroulement solénoïdal.	36
3.1	Mickael Faraday (1791-1867)	39
3.2	Expériences 1 et 2 (le galvanomètre n'est pas représenté).	39
3.4	Heindrich Lenz (1804-1865)	40
3.3	Induction électromagnétique sans mouvement relatif entre inducteur et induit.	40
3.5	Orientation de la f.é.m et du courant induit	41
3.6	Cadre en mouvement uniforme dans un champ permanent.	41

3.7	Choix d'orientations.	41
3.8	Freinage électromagnétique.	42
3.9	Schéma de principe d'un alternateur à induit mobile.	43
3.10	Cadre en mouvement uniforme dans un champ permanent.	44
3.11	Expérience vue de dessus.	44
3.12	Accumulation des porteurs de charges aux extrémités de la barre.	45
3.13	Le courant circule dans le sens du champ électromoteur.	46
3.14	Le circuit balaye une surface Σ entre t et $t + dt$	46
3.15	Plaque conductrice en mouvement dans un champ magnétique uniforme.	47
3.16	Allure des courants de Foucault	48
3.17	Spire conductrice en présence d'un champ magnétique axial et variable.	50
3.18	Cylindre conducteur en présence d'un champ magnétique variable	51
3.19	Dans l'ARQS, $i_1(t) = i_2(t)$	53
3.20	Dans l'ARQS, $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0$	53
3.21	Une exception à la règle de Lenz-Faraday	54
4.1	James Clerk Maxwell (1831-1879) - © George J. Stodart, Public domain, via Wikimedia Commons	55
4.2	Volume V chargé, délimité par une surface fermée S	56
4.3	Condensateur se déchargeant. Ici q décroît au cours du temps.	57
4.4	Notations associées.	61
5.1	Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)	64
5.2	Simulation d'un signal de la forme $f(r - ct)/r$	65
5.3	« Aplatissement » des ondes sphériques.	66
5.4	Heinrich Rudolph Hertz (1857-1894)	66
5.5	Structure d'une onde plane.	68
5.6	Structure d'une onde plane harmonique (ici polarisée rectilignement suivant Oy).	69
5.7	Spectre électromagnétique.	69
5.8	Plan d'onde se propageant suivant \vec{u}	70
5.9	Polarisation rectiligne. L'extrémité du vecteur \vec{E} décrit le segment en pointillé.	72
5.10	Différentes polarisations en fonction du déphasage $\Delta\varphi = \varphi_z - \varphi_y$	73
5.11	Structure d'une onde plane harmonique polarisée circulairement (droite).	73
5.12	Effet d'un Polaroid sur un écran LCD.	74
5.13	Élimination des reflets à la surface d'un extincteur à l'aide d'un polaroid.	75
5.14	Double réfraction à travers un cristal de calcite	75
A.1	Deux spires en interaction.	79
A.2	Graphe des fonctions $K(x)$ et $E(x)$	80
A.3	Anneau conducteur. Vues en coupe et de dessus.	81
A.4	Bobine monocouche vue dans un plan contenant son axe de révolution. Ici $N = 24$	82
A.5	Bobine multi-couche. Ici $N_c = 3$	83

Liste des tableaux

2.1	Résumé des propriétés des champs électrostatique et magnétostatique.	37
-----	--	----

PROPRIÉTÉS LOCALES DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

1

Comme on l'a vu, une distribution statique de charges produit en tout point M un champ électrostatique donné par la loi

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i$$

Expression qui est le résultat de la loi de Coulomb et du principe de superposition. De manière équivalente on peut relier le champ électrostatique avec les sources du champ à l'aide de relations mathématiques *locales*. C'est l'objet de ce chapitre.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/proprietes-locales-E.php>

- 1.1 Théorème de Gauss 1
 - Flux de E 1
 - Application 3
 - Théorème de la divergence 4
 - Équation de Maxwell-Gauss 6
 - Relation de passage 7
- 1.2 Circulation du champ 8
 - Champ conservatif 8
 - Théorème de Stokes 9
 - Éq. de Maxwell-Faraday 11
 - Continuité de E_t 11
- 1.3 Potentiel électrique 12
 - Définition 12
 - Équation de Poisson 13
 - Théorème d'unicité 15
 - Théorème de la moyenne 17
- 1.4 Énergie électrostatique 18
 - Rappels 18
 - Densité d'énergie 19
 - Discussion 20

1.1 Théorème de Gauss

Dans le chapitre sur les conducteurs, nous avons admis le théorème de Gauss qui stipule que le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque est égal à la quantité de charge électrique située à l'intérieur de la surface :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Revenons un instant sur l'origine de ce théorème et voyons comment cette propriété peut s'exprimer sous forme locale.

Flux du champ électrostatique

Pour démontrer le théorème de Gauss dans sa version intégrale, commençons par placer une charge électrique q en O. Celle-ci est responsable d'un champ électrique radial qui décroît comme l'inverse du carré de la distance :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad r = OM$$

Les lignes de champ sont alors des demi-droites partant de O.

Imaginons maintenant une surface fermée S s'appuyant sur des lignes de champ et limitée par deux sections sphériques S_1 et S_2 . Par construction, le flux du champ électrostatique à travers S se résume au flux à travers S_1 et S_2 . Pour tout point situé sur la section sphérique S_1 le

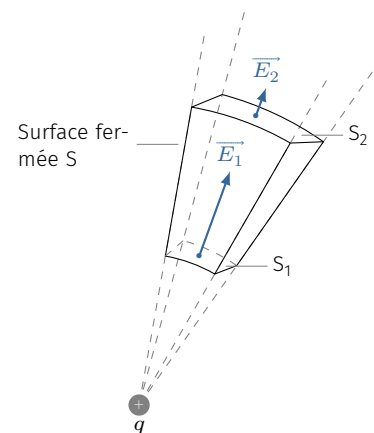


FIG. 11 : Le flux du champ électrique à travers S est nul ici.

Rappelons que \vec{n} est orthogonal à la surface et orienté vers l'extérieur.

1 : Vous pourrez vérifier que le résultat final ne dépend pas de cette hypothèse.

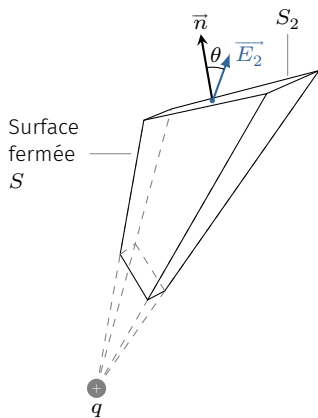


FIG. 1.2 : Le flux est-il toujours nul ?

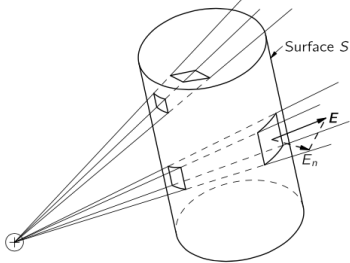


FIG. 1.3 : Tout volume peut être décomposé en un ensemble de troncs coniques infinitésimaux de sorte que le flux total à travers la surface fermée qui délimite ce volume est nul si la charge électrique est à l'extérieur.

champ électrostatique est constant (en norme) et colinéaire à \vec{n} de sorte que

$$\iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n} dS = -E_1 S_1$$

où le signe $-$ apparaît si l'on suppose la charge positive¹. De la même manière, le flux à travers la section sphérique S_2 s'écrit

$$\iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n} dS = E_2 S_2$$

Or, à mesure que l'on s'éloigne de la charge, le champ électrostatique décroît en $1/r^2$, tandis que l'aire de la section sphérique augmente en r^2 de sorte que $E_1 S_1 = E_2 S_2$. Il en résulte que

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E_2 S_2 - E_1 S_1 = 0$$

Imaginons maintenant que les sections sphériques soient assez petites pour être assimilables à des plans, puis inclinons-les. Le résultat précédent change-t-il ? Ici encore le flux ne dépend que du flux à travers S_1 et S_2 . Concentrons-nous sur la surface S_2 . En l'inclinant d'un angle θ par rapport à la situation précédente, on augmente son aire d'un facteur $1/\cos \theta$. Dans le même temps le produit scalaire $\vec{E}_2 \cdot \vec{n}$ diminue d'un facteur $\cos \theta$. C'est pourquoi, $\vec{E}_2 \cdot \vec{n} S_2$ reste inchangé et le flux total à travers S est toujours nul si la charge est à l'extérieur.

Munis de ce résultat, on peut facilement se convaincre que le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle à travers une surface fermée est nul lorsque la charge ne s'y trouve pas enfermée. En effet, sélectionnons un faisceau conique de lignes de champ faiblement divergent : soit il ne traverse pas la surface fermée, soit il la traverse en découpant un volume comme étudié précédemment. Dans tous les cas, le flux produit est nul. En additionnant toutes les contributions on aboutit au résultat :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \text{si la charge est à l'extérieur de } S$$

Que se passe-t-il maintenant si la charge est placée à l'intérieur d'une surface fermée S ? Pour trouver la réponse faisons intervenir une sphère S' située à l'intérieur de S et centrée sur la charge. Notez que l'on peut toujours trouver une telle sphère. Appelons S'' la réunion

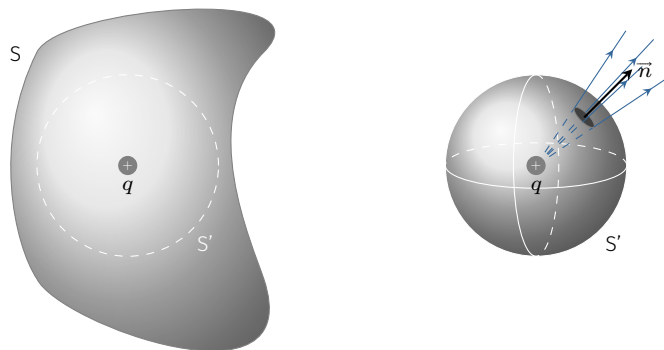


FIG. 1.4 : Le flux du champ électrique à travers S est le même que celui à travers S' .

des deux surfaces, puis notons ϕ , ϕ' et ϕ'' les flux du champ électrostatique à travers les surfaces S , S' et S'' . Puisque \vec{n} est orienté vers l'extérieur de la surface fermée, on a la relation $\phi'' = \phi - \phi'$. Or, S'' délimite un volume qui *ne contient pas* la charge électrique. Par conséquent

$$\phi'' = 0 \quad \text{et} \quad \phi = \phi'$$

Il suffit de calculer le flux à travers la sphère S' pour déterminer le flux à travers une surface fermée quelconque. En outre ce calcul est très simple puisque $\vec{E} \cdot \vec{n} = E$ avec E constant et égal à $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ en tout point de la sphère. On trouve donc

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iint_{S'} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

En résumé,

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \begin{cases} 0, & \text{si la charge est à l'extérieur de } S \\ \frac{q}{\epsilon_0} & \text{si la charge est à l'intérieur de } S \end{cases}$$

Ce résultat se généralise facilement avec N charges ponctuelles. En effet, en vertu du principe de superposition, le champ électrostatique produit par une distribution $\{q_{i=1,\dots,N}\}$ s'écrit

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N$$

dont le flux vaut

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \sum_i \iint_S \vec{E}_i \cdot \vec{n} dS = \frac{\text{somme des charges enfermées par } S}{\epsilon_0}$$

Ce résultat important constitue le théorème de Gauss sous sa forme intégrale :

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \heartsuit \quad (1.1)$$

Attardons-nous un instant sur la beauté de ce théorème. Ce qu'il dit est assez surprenant : le flux du champ électrique à travers une surface fermée dépend seulement de la quantité de charge qui s'y trouve. Autrement dit, une fois la surface fermée choisie, on peut toujours déplacer les charges extérieures; le champ électrique changera partout et notamment en chaque point de la surface fermée, mais le flux à travers celle-ci restera inchangé! Avouez que c'est contraire à l'intuition. Cette propriété surprenante est comme nous l'avons vu la conséquence de trois attributs de l'interaction électrostatique :

1. son caractère central;
2. sa dépendance en $1/r^2$;
3. et le respect du principe de superposition.

Application du théorème de Gauss

Dans certains cas, le théorème de Gauss sous sa forme intégrale permet de déterminer le champ électrique. Le calcul du champ électro-

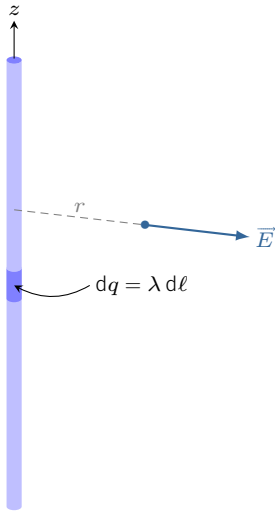


FIG. 1.5 : Fil rectiligne infini et uniformément chargé de densité linéique λ .

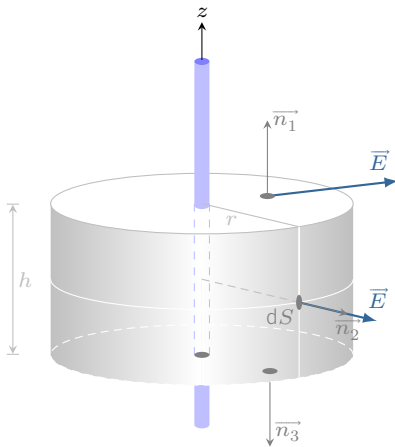


FIG. 1.6 : Calcul du flux à travers un cylindre fermé.

2 : Vu qu'en réalité un fil infini n'existe pas, il arrive un moment où la distance au fil est comparable à la longueur du fil. Dès lors on commence à « sentir » les effets de bords et l'évolution du champ commence à s'écarter sensiblement de l'expression trouvée. Si r est très grand devant la longueur du fil, on peut traiter le fil comme une charge quasi-ponctuelle de sorte que l'on attend une décroissance en $1/r^2$ à très grande distance.

3 : Ce théorème fut d'abord découvert par Lagrange en 1764, puis indépendamment par Gauss en 1813 et Green en 1828; mais c'est Ostrogradsky qui donna la première démonstration en 1831[1].

statique créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé servira d'illustration.

Nous avons vu dans la première partie de ce cours comment faire un calcul direct de ce champ en sommant la contribution de chaque élément de fil.

Voyons maintenant comment le théorème de Gauss permet d'obtenir le résultat plus simplement. Tout d'abord, le problème étant invariant vis-à-vis de toute translation suivant l'axe du fil et de toute rotation par rapport à celui-ci, on en déduit que le champ électrique ne dépend que de la distance au fil, que l'on notera r . Par ailleurs, tout plan contenant le fil est un plan de symétrie de sorte que pour tout point M de ce plan, le champ est dans ce plan. Mais le plan perpendiculaire au fil qui passe par M est aussi un plan de symétrie puisque le fil est infini. Il en découle que le champ électrique est radial : en coordonnées cylindriques on a

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$

Il nous reste à déterminer la fonction $E(r)$ via le théorème de Gauss. L'astuce consiste à choisir une surface fermée qui permet de relier simplement le flux à $E(r)$. Un cylindre fermé de rayon r , dont l'axe coïncide avec le fil fera l'affaire. En effet, le flux du champ électrique à travers ce cylindre vaut

$$\Phi_E = \oiint_{\text{cylindre}} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{(1)} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint_{(2)} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 \, dS + \iint_{(3)} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 \, dS$$

où (1) et (3) correspondent aux bases du cylindre et (2) à la surface latérale. Comme on le voit sur le schéma, le champ électrique est perpendiculaire à \vec{n}_1 et \vec{n}_3 de sorte que le flux se résume au flux à travers la surface latérale cylindrique. Pour cette surface, le champ électrique est parallèle au vecteur \vec{n}_2 , aussi on a

$$\Phi_E = \iint_{(2)} E(r) \, dS = E(r) \iint_{(2)} dS = E(r) 2\pi r h$$

Selon le théorème de Gauss, ce flux vaut $Q_{\text{int}}/\epsilon_0$, avec Q_{int} la quantité de charge enfermée par le cylindre, c'est-à-dire ici $Q_{\text{int}} = \lambda h$. Finalement l'application du théorème de Gauss donne

$$E(r) 2\pi r h = \lambda h / \epsilon_0 \quad \text{soit} \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Le champ décroît en $1/r$ au fur et à mesure qu'on s'éloigne du fil².

Théorème de la divergence

Le théorème de la divergence³ relie le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée S , à la somme d'un scalaire en tout point du volume enfermé par S . Ce théorème fait appel à l'opérateur *divergence*, d'où son nom.

La divergence est un *opérateur* qui s'applique à un champ vectoriel et retourne un champ scalaire. Il se note

$$\operatorname{div}\vec{A} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

La dernière notation permet de retrouver son expression en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Imaginons un petit cube d'arête a centré en $M(x, y, z)$, et dont les faces sont des plans cartésiens. Voyons comment s'écrit le flux d'un champ vectoriel⁴ \vec{A} à travers ce cube.

Commençons par exprimer le flux ϕ_1 à travers la face (1) perpendiculaire à l'axe (Oy) et située en $y + a/2$:

$$\phi_1 = \iint_{(1)} \vec{A} \cdot \vec{u}_y \, dS = \iint_{(1)} A_y(x', y + a/2, z') \, dx' \, dz'$$

De même, le flux à travers la face située en $y - a/2$ vaut

$$\phi_2 = \iint_{(2)} \vec{A} \cdot (-\vec{u}_y) \, dS = \iint_{(2)} -A_y(x', y - a/2, z') \, dx' \, dz'$$

Appelons ϕ_y le flux à travers ces deux faces, et faisons tendre $a \rightarrow 0$. On peut alors considérer l'intégrand constant et égale à sa valeur au centre de la face :

$$\phi_y = \phi_1 + \phi_2 = [A_y(x, y + a/2, z) - A_y(x, y - a/2, z)] a^2$$

a étant un infiniment petit, on peut légitimement remplacer

$$\frac{A_y(x, y + a/2, z) - A_y(x, y - a/2, z)}{a} \quad \text{par} \quad \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y}$$

ce qui donne $\phi_y = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} a^3$. Ce même raisonnement réitéré sur les faces perpendiculaires aux axes (Ox) et (Oz) aboutit à

$$\phi_x = \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} a^3 \quad \text{et} \quad \phi_z = \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z} a^3$$

Finalement, le flux ϕ du champ vectoriel \vec{A} à travers un cube infinitésimal centré en (x, y, z) de volume infinitésimal $d\tau = a^3$ vaut

$$\phi = \left(\frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z} \right) d\tau = \operatorname{div}\vec{A} \, d\tau$$

Mettons dorénavant côte à côte deux cubes infinitésimaux. Lorsque l'on calcule le flux à travers ces deux cubes réunis, on s'aperçoit que la contribution due aux surfaces adjacentes se compensent, car les normales à ces faces sont opposées. Aussi, le flux total se réduit au flux à travers la surface frontière. Dès lors, on conçoit qu'en empilant de tels cubes en nombre infini, on puisse reconstituer un volume

4 : Que l'on suppose continûment dérivable en tout point du volume cubique.

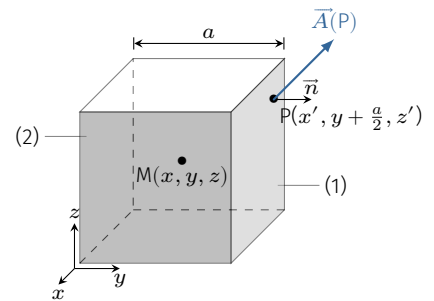


FIG. 1.7 : Calcul du flux à travers un cube.

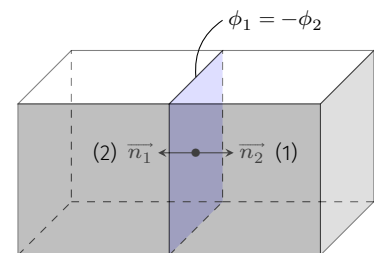


FIG. 1.8 : Le flux à travers deux cubes adjacents se réduit au flux à travers la surface qui délimite le volume constitué par la réunion des deux cubes.

fini, de sorte que le flux à travers la surface frontière soit égal à la somme des flux élémentaires produits à travers chaque petit cube constituant le volume. C'est le sens du théorème de la divergence.

Théorème de la divergence

L'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume V est égal au flux de ce champ à travers la surface fermée qui délimite le volume.

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \, d\tau$$

Ce théorème est aussi appelé *théorème de Green-Ostrogradsky*.

Équation de Maxwell-Gauss

Plaçons-nous dans le cadre d'un problème d'électrostatique, et imaginons une surface S délimitant un volume V quelconque. En vertu du théorème de Gauss, on a

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où Q_{int} est la charge électrique que contient le volume V . Adoptons une approche continue pour décrire la répartition des charges : un volume infinitésimal $d\tau$ centré en un point M contient une charge

$$dq = \rho_e \, d\tau$$

avec ρ_e la **densité volumique de charge** (en C.m^{-3}). On a donc

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_e \, d\tau$$

Appliquons maintenant le théorème de la divergence :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, d\tau$$

Le volume V étant choisi quelconque, il en découle :

Équation de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (1.2)$$

Cette relation est dite locale car elle relie la source locale de charge (via ρ_e) avec ses effets électriques locaux (le champ électrique). Il s'agit de la première équation fondamentale de l'électromagnétisme et nous verrons ultérieurement que sa validité s'étend même aux régimes variables⁵.

5 : En régime variable la loi de Coulomb est violée; de ce point de vue, on peut dire que l'équation de Maxwell-Gauss se révèle plus générale que la loi de Coulomb.

Discontinuité de la composante normale du champ

La relation de Maxwell-Gauss est une équation aux dérivées partielles dont les solutions font intervenir des constantes d'intégration. On détermine généralement ces constantes grâce aux propriétés de symétrie et aux conditions aux limites. Il est donc utile de connaître les *relations de passage* lorsque l'on traverse une interface séparant deux domaines chargés différemment. Pour cela imaginons une sur-

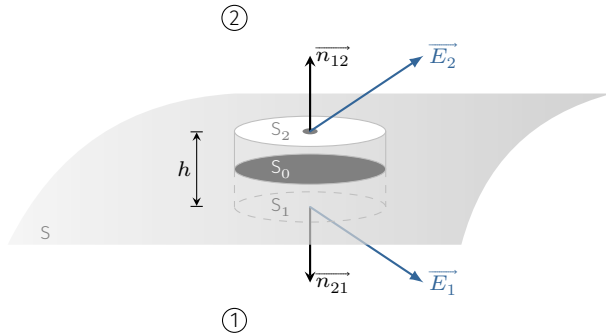


FIG. 1.9 : Interface chargée séparant deux milieux différents notés 1 et 2.

face S qui sépare deux domaines (1 et 2). Pour ne pas perdre en généralité, supposons que cette surface présente des charges avec une densité σ_e . Définissons une boîte cylindrique de petite hauteur h , qui traverse S perpendiculairement en découpant un petit contour fermé C . Appliquons le théorème de Gauss dans sa forme intégrale

$$\iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{21} dS + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12} dS + \iint_{\text{cylindre}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où \vec{n}_{12} est un vecteur normal à la surface dirigée de 1 vers 2. Faisons tendre h vers zéro. Dans ce cas, d'une part la charge intérieure se résume à la charge surfacique, et d'autre part le flux à travers la surface cylindrique latérale tend lui aussi vers 0. Il reste alors

$$-\iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{12} dS + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_0} \sigma_e dS$$

Par ailleurs, choisissons un contour C suffisamment petit pour pouvoir considérer la densité de charge et les champ électriques quasi-uniformes. Dans ce cas, le théorème de Gauss s'écrit

$$-\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{12} S_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12} S_2 = \frac{\sigma_e S_0}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad S_1 = S_2 = S_0$$

avec \vec{E}_1 (resp. \vec{E}_2) le champ électrique qui règne dans le milieu 1 (resp. 2) au voisinage de S . Après simplification, on obtient la relation cherchée :

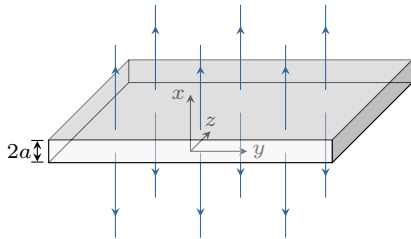


FIG. 1.10 : Nappe d'épaisseur $2a$, chargée uniformément en volume.

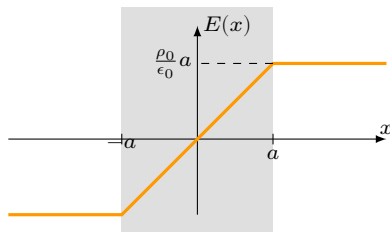


FIG. 1.11 : Evolution du champ électrique $E(x)$.

Relation de passage

La composante normale du champ électrique est discontinue lors de la traversée d'une interface chargée. Cette discontinuité est d'autant plus grande que la densité de charge est importante.

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \quad (1.3)$$

Exemple - Champ créé par une nappe chargée

Considérons une distribution de charges uniformément réparties entre les deux plans cartésiens d'équation $x = a$ et $x = -a$. La densité volumique de charge est donnée par

$$\rho_e = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La distribution des charges présente une invariance par translation suivant (Oy) et (Oz) . En conséquence le champ électrique ne dépend que de x . Par ailleurs, tout plan contenant l'axe (M, \vec{u}_x) est un plan de symétrie, de sorte que le champ électrique est nécessairement suivant \vec{u}_x . On a

$$\vec{E} = E(x) \vec{u}_x$$

Enfin, le plan $x = 0$ étant un plan de symétrie, on a $E(-x) = -E(x)$, ce qui permet de restreindre l'étude à \mathbb{R}^+ . L'équation de Maxwell-Gauss donne

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \implies \frac{dE}{dx} = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} & \text{si } x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

L'intégration de ces équations est élémentaire :

$$E(x) = C_1 \quad \text{si } x > a \quad \text{et} \quad E(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x + C_2 \quad \text{si } x \leq a$$

Il nous reste à déterminer les deux constantes d'intégration. Tout d'abord la fonction $E(x)$ étant impaire, on a bien sûr $E(0) = 0$ ce qui implique $C_2 = 0$. Enfin, la composante normale du champ est continue en $x = a$ (car $\sigma_e = 0$) ce qui se traduit par

$$\lim_{x \rightarrow a^-} E(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} E(x) \quad \text{soit} \quad C_1 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} a$$

On en déduit l'évolution de la FIG. 1.11.

1.2 Circulation du champ électrostatique

Champ conservatif

Plaçons une charge ponctuelle q en O . Il règne alors dans l'espace un champ électrique donné par

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad r = OM$$

Faisons maintenant circuler ce champ le long d'un circuit C fermé et orienté. Par définition, la circulation est la quantité

$$\Gamma = \oint_C \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell}$$

où M parcourt le circuit C dans le sens positif, $d\vec{\ell}$ étant son vecteur déplacement infinitésimal.

Le déplacement présente une composante parallèle à \vec{u}_r et une composante perpendiculaire : $d\vec{\ell} = d\vec{\ell}_\perp + d\vec{\ell}_\parallel$. La composante parallèle, la seule qui nous intéresse pour le calcul de Γ , correspond au déplacement radial $d\vec{\ell}_\parallel = dr \vec{u}_r$ de sorte que la circulation s'écrit

$$\Gamma = \oint_C \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r_i}^{r_f}$$

Mais puisque le circuit est par hypothèse fermé, on a

$$r_i = r_f \text{ soit } \Gamma = 0$$

Si le champ électrique est produit par une distribution de charges $\{q_{i=1\dots N}\}$, conformément au principe de superposition, on a

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \text{ avec } \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = 0$$

de sorte que la circulation du champ résultant est également nulle.

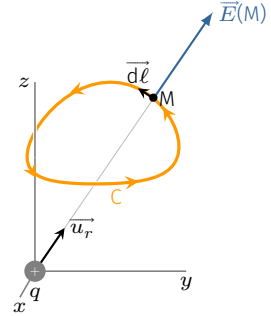


FIG. 1.12 : Circulation du champ électrique le long d'un circuit fermé orienté.

Circulation de \vec{E}

En régime statique, la circulation de \vec{E} le long de n'importe quel contour fermé est toujours nulle :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \text{ pour tout circuit fermé}$$

On dit que le champ électrostatique est à *circulation conservative*.

Notez que cette propriété serait encore vérifiée si la force électrique ne variait pas en $1/r^2$. Elle est à relier au fait que l'interaction coulombienne est une force centrale qui ne dépend que de r .

Théorème de Stokes

Le théorème de Stokes relie la circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour fermé, au flux d'un champ particulier à travers une surface s'appuyant sur le contour initial. Ce théorème fait intervenir un nouvel opérateur différentiel : *le rotationnel*.

L'opérateur rotationnel agit sur un champ vectoriel, et retourne également un champ vectoriel. Il se note

$$\text{rot } \vec{A} \text{ ou } \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

La dernière notation permet de retenir l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Imaginons un contour carré, d'arête a , centré en $M(x, y, z)$ et orienté dans le sens trigonométrique. Disposons provisoirement le contour perpendiculairement à l'axe (Ox) .

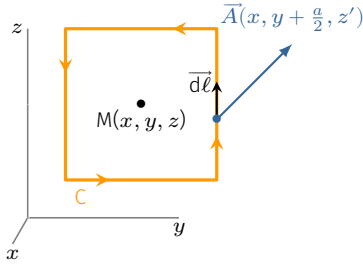


FIG. 1.13 : Circulation le long d'un carré orienté d'arête a .

La circulation d'un champ vectoriel \vec{A} le long de ce contour s'écrit

$$\Gamma = \int_{z-\frac{a}{2}}^{z+\frac{a}{2}} A_z \left(x, y + \frac{a}{2}, z' \right) dz' + \int_{y+\frac{a}{2}}^{y-\frac{a}{2}} A_y \left(x, y', z + \frac{a}{2} \right) dy' + \int_{z+\frac{a}{2}}^{z-\frac{a}{2}} A_z \left(x, y - \frac{a}{2}, z' \right) dz' + \int_{y-\frac{a}{2}}^{y+\frac{a}{2}} A_y \left(x, y', z - \frac{a}{2} \right) dz' \quad (1.5)$$

Faisons tendre $a \rightarrow 0$. On peut alors considérer les intégrands constants et égaux à la valeur qu'ils prennent au milieu du domaine d'intégration :

$$\Gamma \xrightarrow{a \rightarrow 0} d\Gamma = a \left[A_z \left(x, y + \frac{a}{2}, z \right) - A_y \left(x, y, z + \frac{a}{2} \right) - A_z \left(x, y - \frac{a}{2}, z \right) + A_y \left(x, y, z - \frac{a}{2} \right) \right]$$

Comme a est un infiniment petit, on peut remplacer

$$\frac{A_z(x, y + a/2, z) - A_z(x, y - a/2, z)}{a} \text{ par } \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial y} \text{ etc ...}$$

ce qui donne

$$d\Gamma = a^2 \left(\frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial z} \right) = a^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{u}_x$$

Évidemment, si l'on avait choisi un contour perpendiculaire à l'axe (Oy) on aurait trouvé $a^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{u}_y$. De manière générale, pour un contour infinitésimal d'aire dS , on trouve

$$d\Gamma = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface du contour infinitésimal, son sens étant relié à l'orientation du contour par la règle de la main droite ou du tire-bouchon⁶.

6 : Un tire-bouchon que l'on tourne dans le sens positif du contour orienté, se déplace dans la direction donnée par \vec{n} .

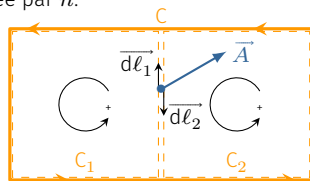


FIG. 1.14 : 2 contours cote à cote.

Mettons dorénavant côte à côte deux contours infinitésimaux C_1 et C_2 orientés dans le même sens, et notons C le contour externe. Lorsque l'on somme les circulations du champ \vec{A} le long des deux contours C_1 et C_2 , on s'aperçoit que les contributions dues aux côtés adjacents se compensent, car les vecteurs $d\vec{\ell}$ de ces côtés sont opposés. Ainsi la somme des circulations se réduit à la circulation de \vec{A} le long du bord extérieur C . Or, on peut toujours décomposer une surface finie S en une infinité de carrés adjacents, de sorte que si l'on somme les

termes $(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$ on retrouve la circulation le long du contour C sur lequel s'appuie S. C'est le sens du théorème de Stokes.

Théorème de Stokes

Le flux du rotationnel d'un champ vectoriel à travers une surface S est égal à la circulation de ce champ le long du circuit fermé C qui délimite la surface S.

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire normal à la surface S, dont le sens est associé au sens de parcours du circuit via la règle du tire-bouchon.

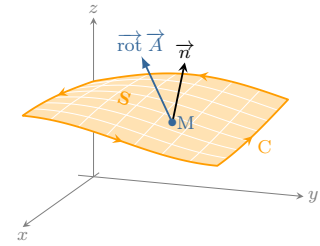


FIG. 1.15 : La circulation le long de C d'un champ vectoriel peut se calculer à partir du flux de son rotationnel à travers une surface s'appuyant sur C.

Notez qu'une conséquence de ce théorème est que le flux de tout champ qui dérive d'un rotationnel ($\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$) ne dépend que de \vec{A} et du contour sur lequel s'appuie la surface. Cette propriété sera particulièrement intéressante dans l'étude du champ magnétique.

Équation de Maxwell-Faraday statique

Comme nous l'avons vu, le champ électrostatique est à circulation conservative. En vertu du théorème de Stokes, on peut écrire

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{donc} \quad \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0$$

La dernière relation devant être vérifiée pour toute surface, il faut nécessairement que $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ partout. Nous venons de trouver la deuxième équation de Maxwell relative au champ électrostatique.

Equation de Maxwell-Faraday statique

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad \text{partout}$$

Cette propriété locale traduit le fait que le champ électrostatique est à circulation conservative. Associée à l'équation de Maxwell-Gauss elle permet de déterminer complètement le champ électrostatique.

Exercice – Soit un champ vectoriel $\vec{A}(M) = \vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}$ avec $\vec{B} = B \vec{u}_z$. Ce champ peut-il être un champ électrostatique ?

Rép. Non car $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} \neq \vec{0}$.

Continuité de la composante tangentielle du champ

Nous savons qu'à la traversée d'une nappe chargée, la composante normale du champ électrique subit une discontinuité donnée par la relation (1.3). Voyons maintenant ce qu'il en est pour la composante tangentielle. Pour cela, nous allons faire circuler le champ électrique

le long d'un contour rectangulaire (ABCD) qui coupe perpendiculairement une surface S chargée avec une densité σ_e .

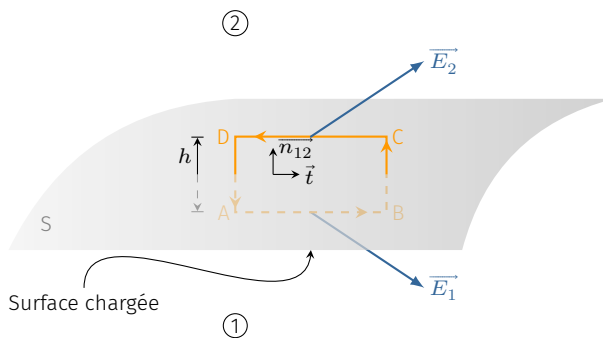


FIG. 1.16 : Contour rectangulaire coupant la surface chargée perpendiculairement.

Le caractère conservatif du champ se traduit par

$$\oint_{(ABCD)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{[AB]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[BC]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[CD]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[DA]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Appelons h la largeur du rectangle et ℓ sa longueur. Si l'on fait tendre $h \rightarrow 0$, le deuxième et le quatrième terme disparaissent. Par ailleurs, choisissons ℓ assez petit pour pouvoir considérer le champ électrique uniforme le long des tronçons rectilignes. On obtient alors l'équation

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{AB} + \vec{E}_2 \cdot \vec{CD} = 0 \quad \text{soit} \quad (E_{t1} - E_{t2}) \ell = 0$$

avec E_{t1} et E_{t2} les composantes tangentes du champ de part et d'autre de la surface. On en déduit **la continuité de la composante tangentielle du champ à la traversée d'une surface chargée**. Finalement on retiendra la relation de passage pour le champ électrique.

Relation de passage du champ électrique

À la traversée d'une surface chargée, le champ électrique présente une *continuité* de sa composante tangentielle et une *discontinuité* de sa composante normale proportionnelle à la densité surfacique de charge σ_e :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma_e \vec{n}_{12}}{\epsilon_0} \tag{1.6}$$

1.3 Potentiel électrique

Définition

7 : De rotationnel nul.

Nous venons de voir qu'une distribution stationnaire de charges crée un champ électrostatique qui a la propriété d'être irrotationnel⁷. Or, on peut montrer que tout champ dérivant d'un gradient est irrotationnel,

et réciproquement :

$$\vec{A}(M) = \vec{\nabla}\varphi(M) \iff \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M) = \vec{0}$$

où $\varphi(M)$ est le *potentiel* associé au champ vectoriel.

Exemple

Considérons un potentiel $\varphi(x, y, z) = xy$ et vérifions que le champ vectoriel associé est effectivement irrotationnel. Le champ vectoriel \vec{A} vaut

$$\vec{A} = \vec{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant son rotationnel :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - 1 = 0 \end{pmatrix}$$

On a effectivement $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{0}$.

Dans le cas du champ électrostatique, le potentiel associé est appelé potentiel électrique et noté $V(M)$. Par définition, on a

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}V(M)$$

La présence du signe \ominus est purement conventionnelle.

On a déjà introduit ce potentiel à partir du travail de la force électrique. Rappelons ses propriétés :

- ce champ scalaire ne dépend que de l'espace, et est défini à une constante additive près;
- il s'exprime en volt dans le Système international d'unités;
- ses surfaces de niveau (équipotentiellles) coupent les lignes de champ à angle droit;
- on peut calculer directement le potentiel électrostatique *via* l'expression

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad \text{ou} \quad V(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Pour une distribution bornée, le potentiel est défini et continu.

Équation de Poisson

Considérons une région de l'espace qui présente une distribution stationnaire de charges électriques de densité volumique $\rho_e(x, y, z)$. Désignons par $\vec{E}(x, y, z)$ et $V(x, y, z)$, le champ électrique et le potentiel en un point de coordonnées (x, y, z) . On a vu que le théorème de Gauss se traduit localement par

$$\text{div}\vec{E}(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

De plus, par définition $\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla}V(x, y, z)$. En substituant, il vient

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}V(x, y, z) = -\frac{\rho_e(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

Cette équation aux dérivées partielles fait intervenir un nouvel opérateur différentiel que l'on appelle *laplacien* et note Δ :

$$\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}f) \quad \text{ou} \quad \Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2 f$$

La dernière notation permet de retenir l'expression du laplacien en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Finalement, le potentiel électrostatique obéit à une équation aux dérivées partielles, que l'on appelle *l'équation de Poisson* :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\rho_e(x, y, z)}{\epsilon_0} = 0 \quad [\text{Eq. de Poisson}] \quad \heartsuit \quad (1.7)$$

La résolution de cette équation du second ordre introduit des constantes d'intégration que l'on détermine grâce aux conditions aux limites et à la propriété de continuité du potentiel.

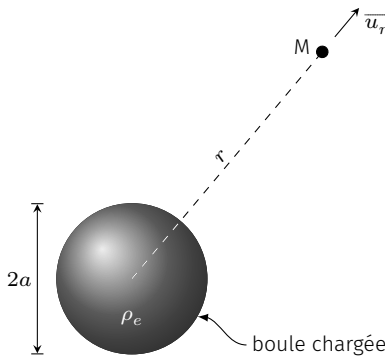


FIG. 1.17 : Boule de rayon a , uniformément chargée.

Exemple – Potentiel créé par une boule chargée

Disposons dans le vide une boule de rayon a , uniformément chargée avec une densité volumique ρ_e constante. À l'aide de l'équation de Poisson, déterminons le potentiel électrique qui règne en tout point de l'espace.

Compte tenu de la symétrie sphérique, on adopte les coordonnées sphériques et l'on sait que le potentiel ne dépend que de la coordonnée radiale r . En coordonnées sphériques, le laplacien s'écrit

$$\Delta f(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

de sorte que l'équation de Poisson s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > a \\ -\rho_e/\epsilon_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Commençons par trouver la forme du potentiel à l'extérieur de la boule. En intégrant deux fois par rapport à r on trouve

$$V(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 \quad \text{si } r > a$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration. Adoptons la convention habituelle $V = 0$ à l'infini. On en tire $C_2 = 0$ et

$$V(r) = \frac{C_1}{r} \quad \text{si } r > a$$

On peut déterminer C_1 car l'on sait quel est le comportement asymptotique du potentiel. En effet, si l'on se place très loin de la boule chargée,

on verra essentiellement une charge ponctuelle. On prévoit donc

$$V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_e a^3}{3\epsilon_0 r}$$

Par identification, on en déduit⁸ $C_1 = \rho_e a^3 / (3\epsilon_0)$.

À l'intérieur de la boule, l'équation de Poisson s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

ce qui donne après une première intégration⁹ $r^2 \frac{dV}{dr} = -\rho_e \frac{r^3}{3\epsilon_0} + C_3$, puis en intégrant à nouveau :

$$V(r) = -\rho_e \frac{r^2}{6\epsilon_0} - \frac{C_3}{r} + C_4$$

Si C_3 était non nul on verrait le potentiel et le champ électrique diverger en $r = 0$, ce qui est impossible¹⁰. Par conséquent, C_3 est nécessairement nul.

Pour déterminer C_4 utilisons la continuité du potentiel en $r = a$:

$$\lim_{r \rightarrow a^-} V(r) = \lim_{r \rightarrow a^+} V(r) \quad \text{soit} \quad -\rho_e \frac{a^2}{6\epsilon_0} + C_4 = \rho_e \frac{a^2}{3\epsilon_0}$$

Ce qui donne $C_4 = \rho_e a^2 / (2\epsilon_0)$. Finalement, le potentiel s'écrit

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_e a^3}{3\epsilon_0 r} & \text{si } r > a \\ \frac{\rho_e}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.8)$$

Lorsque qu'une portion d'espace est exempte de charges électriques, l'équation de Poisson prend la forme simple suivante :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad [\text{Eq. de Laplace}] \quad \heartsuit \quad (1.9)$$

Il s'agit de l'équation de Laplace. L'ensemble des fonctions vérifiant cette équation aux dérivées partielles sont dites *harmoniques*.

Théorème d'unicité

Une stratégie pour résoudre un problème électrostatique consiste à résoudre l'équation de Poisson (ou Laplace) dans un certain domaine de l'espace. Ses bords imposent ce que l'on appelle des *conditions aux limites* :

- Soit on connaît la valeur du potentiel sur la frontière de la région considérée. Il s'agit alors d'un *problème de Dirichlet*¹¹.
- Soit on connaît la valeur de son gradient projeté sur la normale extérieure de la frontière. Il s'agit dans ce cas d'un *problème de Von Neumann*.

On montre en mathématique que si l'équation de Poisson admet une solution¹², celle-ci est *unique*. Plus précisément, dans un problème de Dirichlet, il existe un seul champ scalaire qui vérifie l'équation

8 : On retrouve l'idée qu'une boule à symétrie sphérique produit à l'extérieur les mêmes effets que si toute la charge était concentrée en son centre.

9 : On exclut $r = 0$. Il suffira de prolonger $V(r)$ par continuité.

10 : D'une part le potentiel est fini, d'autre part le champ électrique est nul en $r = 0$, car le centre de la boule est un centre de symétrie.

11 : Par exemple un système de conducteurs dont les potentiels sont fixés par des générateurs, avec comme convention $V = 0$ à l'infini forme un tel problème.

12 : Si le problème de physique est bien posé, l'équation de Poisson admet forcément une solution.

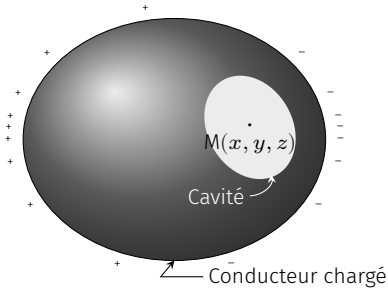


FIG. 1.18 : Cavité dans un conducteur chargé à l'équilibre.

Test de la loi de Coulomb

Toute violation de l'effet « cage de Faraday » serait le signe que l'interaction électrostatique ne suit pas une loi en $1/r^2$. À l'heure actuelle aucune expérience n'a réussi à mettre en défaut l'effet « cage de Faraday » et les mesures les plus récentes[2] permettent de conclure que la loi de Coulomb est en

$$\frac{1}{r^{2+\epsilon}} \text{ avec } |\epsilon| < 6 \cdot 10^{-17}$$

Le premier physicien à avoir entrepris ce type d'expérience est Henry Cavendish. Il trouva $|\epsilon| < 0,02$, ceci bien avant la célèbre expérience de Coulomb. L'histoire a préféré retenir la preuve directe de Coulomb, pourtant moins précise...

de Poisson et les conditions aux limites. Dans un problème de Von Neumann, le potentiel électrique est indéterminé à une constante additive près mais le champ électrique qui en dérive est unique. Ce théorème d'unicité rend de précieux services dans certains cas. Illustrons cela sur deux exemples.

La cage de Faraday – Considérons un volume conducteur de forme quelconque présentant une cavité elle aussi de forme quelconque. Supposons cette cavité *complètement vide*, et le conducteur à l'équilibre et a priori chargé. Aucune hypothèse particulière n'est faite sur l'environnement extérieur au conducteur. Que sait-on du potentiel à l'intérieur de cette cavité ? Étant donné l'absence de charges électriques, la fonction $V(x, y, z)$ obéit à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Avec comme condition aux bords de la cavité : $V = V_0$ où V_0 est le potentiel du conducteur qui –rapellons-le– est uniforme au sein d'un conducteur à l'équilibre. Or, il y a une solution évidente à ce problème. En effet la solution $V(x, y, z) = V_0$ vérifie bien l'équation de Laplace et les conditions aux limites. En vertu du théorème d'unicité, nous avons donc trouvé la solution :

$$V(x, y, z) = V_0 \text{ et } \vec{E}(x, y, z) = \vec{0} \text{ à l'intérieur de la cavité}$$

Autrement dit, à l'intérieur d'une cavité conductrice, le champ électrique est nul, ceci quel que soit le champ à l'extérieur du conducteur. Le conducteur sert donc de protection électrostatique entre l'extérieur et l'intérieur de la cavité : c'est l'**effet cage de Faraday**.

Méthode des images électriques – Imaginons différents corps chargés produisant un potentiel électrique $V(x, y, z)$ (FIG. 1.19). Supposons que l'on ait pu déterminer la surface équipotentielle S_0 correspondant à $V = V_0$. Supprimons les corps situés à l'intérieur de S_0 puis métallisons S_0 . Si l'on porte le conducteur ainsi formé au potentiel V_0 , un observateur extérieur à S_0 ne s'est aperçu de rien : en effet, le potentiel obéit à la même équation de Poisson avec les mêmes conditions aux limites que précédemment. Autrement dit, ces deux problèmes sont interchangeables, si l'on se limite aux effets électriques produits à l'extérieur de S_0 . C'est cette équivalence qui est à la base de la méthode des images électriques.

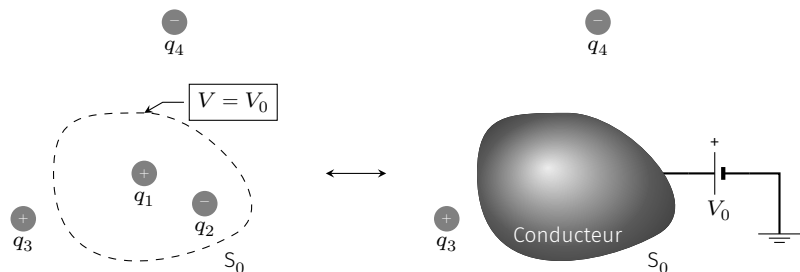


FIG. 1.19 : Méthode des images électriques. Du point de vue d'un observateur situé à l'extérieur de S_0 , les deux problèmes sont équivalents.

Par exemple, considérons le problème suivant : on approche une charge ponctuelle q à la distance d d'une plaque conductrice reliée à la terre (au potentiel $V = 0$). On cherche à déterminer la densité σ_e

avec laquelle le conducteur se charge par influence. Pour cela il suffit de connaître le potentiel au voisinage du conducteur pour en tirer le champ électrique, puis σ_e à l'aide du théorème de Coulomb. On peut utiliser la méthode des images électriques ici. En effet, on sait que deux charges opposées q et $-q$ situés en A et B produisent une équipotentielle $V = 0$ correspondant au plan médiateur du segment [AB]. C'est pourquoi, pour déterminer le champ et le potentiel électrique dans la portion $z > 0$ on peut remplacer le conducteur par son image électrique, à savoir une charge $-q$ située en $(0,0,-d)$. Aussi, on peut écrire que

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad \text{si } z > 0$$

Pour une résolution complète de ce problème, voir le [recueil d'exercice d'électromagnétisme I](#)

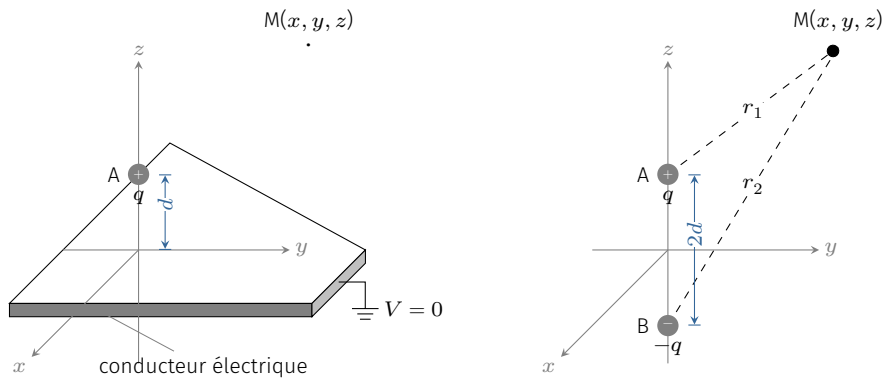


FIG. 1.20 : Influence d'une charge sur une plaque conductrice traitée par la méthode des images électriques.

Théorème de la moyenne

Supposons un domaine \mathcal{D} de l'espace, vide de charge, où règne champ et potentiel électrostatiques. On peut penser à la région située entre des conducteurs chargés et à l'équilibre par exemple. Dans ce domaine, le potentiel $V(x, y, z)$ obéit à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$.

Entourons un point $M(x, y, z)$ d'une sphère S_M de rayon¹³ r . On définit la moyenne du potentiel sur la sphère par

$$\langle V \rangle = \frac{\iint_{S_M} V \, dS}{4\pi r^2}$$

On montre alors que cette moyenne donne immédiatement la valeur du potentiel au centre de la sphère. Autrement-dit :

$$V(M) = \langle V \rangle$$

Cette propriété est mise à profit dans une méthode de résolution numérique, appelé *méthode de relaxation*. Cela consiste d'abord à produire un maillage de l'espace en le réduisant à un réseau discret. Ensuite, on fixe une valeur arbitraire aux nœuds du réseau sauf aux bords de la région où les conditions aux limites imposent une valeur précise¹⁴. L'algorithme consiste simplement à passer en revue tous les nœuds et à leur affecter une valeur correspondant à la moyenne

13 : La sphère possède un rayon quelconque. La seule condition est qu'elle doit se trouver entièrement dans \mathcal{D}

14 : On se place dans un problème de Dirichlet

des valeurs situées sur les nœuds voisins. En réitérant cette procédure, la valeur du potentiel en tout point converge vers la solution de l'équation de Laplace.

- simulation : femto-physique.fr/analyse-numerique/methode-de-relaxation.php

1.4 Énergie électrostatique

Rappels

Considérons une distribution stationnaire de N charges électriques $\{q_{i=1,\dots,N}\}$. On note r_{ij} la distance qui sépare les charges q_i et q_j . Par définition, l'énergie électrostatique d'interaction $\mathcal{E}_{p \text{ int}}$ d'un tel système représente le travail qu'un opérateur doit fournir pour amener, de façon quasi-statique et depuis l'infini, les charges dans leur position finale.

Comme on l'a démontré dans la première partie de ce cours, cette énergie ne dépend pas de la manière dont on s'y prend pour constituer le système, et il suffit de sommer autant de termes $q_i q_j / (4\pi\epsilon_0 r_{ij})$ qu'il y a de couples (i, j)

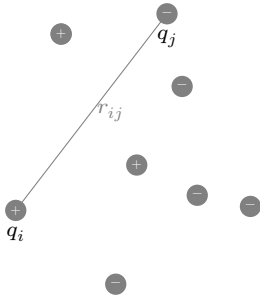


FIG. 1.21 : Distribution de N charges ponctuelles.

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \sum_{\text{couples } (i,j)} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (1.10)$$

On peut aussi reformuler en faisant intervenir le potentiel que subit la charge q_i

$$V_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

On rappelle que

$$\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = \sum_{i,j < i} u_{ij} + \sum_{i,j > i} u_{ij}$$

ce qui donne lorsque $u_{ij} = u_{ji}$

$$\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = 2 \sum_{i,j < i} u_{ij}$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p \text{ int}} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (1.11) \end{aligned}$$

Cette dernière expression prend une forme intégrale pour une distribution continue de charges

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho_e(M) V(M) d\tau \quad \heartsuit \quad (1.12)$$

où \mathcal{D} est une distribution volumique de charges.

Exemple : énergie d'une boule uniformément chargée

Reprenons l'exemple de la boule de rayon a uniformément chargée. La résolution de l'équation de Poisson a donné

$$\rho_e(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > a \\ \rho_e & \text{sinon} \end{cases} \implies V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_e a^3}{3\epsilon_0} & \text{si } r > a \\ \frac{\rho_e}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

L'énergie potentielle d'interaction vaut donc

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{r \leq a} \frac{\rho_e^2}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) d\tau$$

avec $d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ en coordonnées sphériques. Après intégration sur θ et φ on obtient l'intégrale simple

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\rho_e^2}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) 4\pi r^2 dr = \frac{4}{15} \pi \frac{\rho_e^2 a^5}{\epsilon_0}$$

Si l'on fait intervenir la charge totale $Q = \rho_e \times \frac{4}{3}\pi a^3$ on aboutit au résultat

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

De manière générale, l'énergie propre d'un système chargé de charge totale Q , confiné dans un volume de taille caractéristique a présente une énergie électrostatique

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \beta \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

avec β un coefficient adimensionné qui dépend de la façon dont les charges sont réparties dans le volume.

Densité d'énergie volumique

Il est possible de relier cette énergie uniquement au champ électrique. Pour cela il suffit de manipuler un peu l'équation (1.12). Commençons par remarquer que l'on peut intégrer $\rho_e V$ sur tout l'espace, car dans le vide on a $\rho_e = 0$:

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho_e(M) V(M) d\tau \quad \text{où } \mathcal{D} = \text{tout l'espace}$$

Remplaçons maintenant ρ_e par $\epsilon_0 \text{div} \vec{E}$ en vertu de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \epsilon_0 V \text{div} \vec{E} d\tau$$

puis utilisons l'identité

$$\text{div} (V \vec{E}) = V \text{div} \vec{E} + \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V = V \text{div} \vec{E} - E^2$$

Il vient donc

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\mathcal{D}} \text{div} (V \vec{E}) d\tau + \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

Le théorème de la divergence permet de transformer la première intégrale :

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iint_S V \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

où la surface S est une sphère de rayon $r \rightarrow \infty$ de façon à pouvoir englober tout l'espace. Or nous savons que si l'on se place assez loin d'une distribution localisée, le potentiel et le champ électrique tendent vers 0 le premier en $1/r$, le second $1/r^2$. Comme l'aire de

15 : Si la distribution est neutre, la convergence n'en sera que mieux assurée puisque V et E tendront vers 0 encore plus rapidement.

la surface d'intégration croît en r^2 il vient immédiatement que l'intégrale de flux tend vers 0 quand $r \rightarrow \infty$ ¹⁵. Finalement, on aboutit à

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau \quad \text{où } \mathcal{D} = \text{tout l'espace} \quad \heartsuit \quad (1.13)$$

Aussi surprenant que cela puisse paraître, cette dernière relation ne contient aucune référence explicite aux sources de champ. Tout se passe comme si l'énergie électrostatique d'une distribution de charges était localisée, non pas dans les charges, mais dans l'espace à raison de $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ joules par mètre cube. On définit alors une *énergie électrostatique volumique*

$$w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad [\text{J.m}^{-3}] \quad \heartsuit \quad (1.14)$$

Exercice – Retrouver l'énergie d'une boule uniformément chargée à partir de l'expression du champ électrostatique.

Discussion

Pour terminer, attardons-nous un instant sur quelques questions que peuvent soulever les derniers résultats.

Tout d'abord, n'est-il pas troublant que l'expression

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho_e(M) V(M) d\tau$$

fasse intervenir le potentiel $V(M)$, fonction qui est indéterminée ? Est-ce à dire que l'énergie est indéterminée ? Rassurez-vous, l'énergie est bien définie ; mais l'expression ci-dessus ne fait pas intervenir n'importe quel potentiel. En effet dans l'expression

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

on a $V_i = \sum_j q_j / (4\pi\epsilon_0 r_{ij})$, c'est-à-dire le potentiel électrique qui prend la valeur nulle quand $r_{ij} \rightarrow \infty$. On retiendra donc que l'expression de l'énergie fait intervenir un potentiel particulier celui pour lequel l'origine est fixée à l'infini.

D'autre part, nous avons montré que l'énergie potentielle électrostatique peut s'interpréter comme une énergie de champ

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho_e(M) V(M) d\tau = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau > 0$$

Indubitablement, la dernière expression impose $\mathcal{E}_{\text{p int}} > 0$. Or, tout chimiste sait que l'énergie électrostatique d'un cristal ionique est négative, d'autant plus négatif que la cohésion est importante. Par exemple deux charges q et q' de signe opposé, et disposées à une

distance r présentent une énergie

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} < 0$$

Il y a donc là une contradiction.

En fait, dans la formule

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho_e(M)V(M) d\tau$$

V désigne le potentiel créé par *toutes* les charges, sans exclusion de charge située au point M , alors que dans l'expression

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

V_i représente le potentiel créé par toutes les charges *autres* que q_i . Aussi, la dernière expression n'inclut pas ce que l'on appelle l'énergie propre des charges.

Pour éclaircir cet aspect, prenons deux distributions \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de charge totale respective q_1 et q_2 . Appelons $\rho_{e,1}$ et $\rho_{e,2}$ la densité de charge de chacune des distributions. L'énergie totale du système s'écrit

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} [\rho_{e,1}(M) + \rho_{e,2}(M)] V(M) d\tau$$

avec $V(M) = V_1(M) + V_2(M)$; $V_1(M)$ et $V_2(M)$ étant les potentiels créés par \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 en M . En développant on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p \text{ int}} = & \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_1} \rho_{e,1} V_1 d\tau}_{\text{énergie de } \mathcal{D}_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_2} \rho_{e,2} V_2 d\tau}_{\text{énergie de } \mathcal{D}_2} + \\ & \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_1} \rho_{e,1} V_2 d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_2} \rho_{e,2} V_1 d\tau}_{\mathcal{E}_p^{12}} \end{aligned}$$

Les deux premiers termes représentent les énergies propres à chaque distribution, et le terme \mathcal{E}_p^{12} est appelé *énergie d'interaction mutuelle*. Imaginez maintenant que l'on réduise le volume des distributions de façon à pouvoir les assimiler à deux charges ponctuelles. On trouve alors

$$\mathcal{E}_p^{12} \rightarrow \frac{1}{2} \left(V_2 \iiint_{\mathcal{D}_1} \rho_{e,1} d\tau + V_1 \iiint_{\mathcal{D}_2} \rho_{e,2} d\tau \right) = \frac{1}{2} (q_1 V_2 + q_2 V_1)$$

On voit alors que l'énergie d'interaction mutuelle s'identifie à l'énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles.

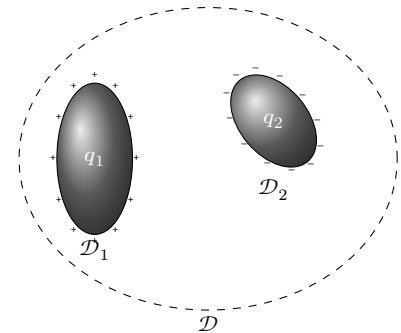


FIG. 1.22 : Distribution formée de deux corps chargés.

En résumé

L'énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

n'intègre pas l'énergie propre de chaque charge contrairement à l'expression

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho_e(\mathbf{M}) V(\mathbf{M}) \, d\tau = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \, d\tau$$

Dans le cas d'une distribution de charges ponctuelles, l'énergie propre pose une difficulté majeure. En effet si l'on cherche par exemple à calculer l'énergie propre d'une charge ponctuelle on trouve

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \, d\tau = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0 r^2)^2} \, d\tau \rightarrow \infty$$

Ce résultat dit simplement qu'il faut fournir une énergie infinie pour concentrer une charge avec une densité infinie en un point, ce qui n'est pas vraiment surprenant. En réalité, cela souligne que le concept de charge ponctuelle n'est pas satisfaisant dans le cadre de la théorie électromagnétique.

PROPRIÉTÉS DU CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE

2

À l'instar du champ électrostatique, le champ magnétostatique obéit à des relations mathématiques locales qui renseignent sur sa structure et son lien aux courants. Nous verrons dans ce chapitre que, de la même manière qu'il existe un potentiel électrostatique, il existe également un potentiel (vectoriel) dont dérive le champ magnétique. Cette nouvelle grandeur jouera un rôle important dans l'étude du phénomène d'induction.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/proprietes-locales-B.php>

2.1 Théorème d'Ampère

Loi de Biot et Savart

Considérons un conducteur C parcouru par un courant électrique d'intensité I . Comme on l'a déjà vu, le transport d'électricité est quantifié par le vecteur densité de courant volumique \vec{j}_e dont le flux à travers une section de C donne I :

$$\iint_S \vec{j}_e \cdot \vec{n} dS = I \quad (2.1)$$

$[A \cdot m^{-2}] \times [m^2] \quad [A]$

En régime stationnaire, toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps¹. En conséquence, les porteurs de charge ne peuvent s'accumuler, mais simplement transiter : le flux de \vec{j}_e à travers n'importe quelle surface fermée est nécessairement nul ce qui se traduit mathématiquement par la relation²

$$\text{div} \vec{j}_e = \vec{0} \quad (2.2)$$

Comme Ørsted l'a montré le premier en 1820, un circuit parcouru par un courant électrique permanent est responsable de l'apparition d'un champ magnétique. Biot et Savart en ont donné une formulation pour un circuit filiforme :

$$\vec{B} = \oint_C d\vec{B} = \oint_C \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{4\pi r^2} \quad (2.3)$$

Si l'on ne peut pas négliger l'épaisseur des fils, il faut considérer que le courant est distribué en volume. Prenons une portion de longueur $d\ell$ et isolons un tube de courant de section infinitésimale dS . Ce tube

- 2.1 Théorème d'Ampère . . . 23
 - Loi de Biot et Savart . . . 23
 - Théorème d'Ampère . . . 24
 - Eq. de Maxwell-Ampère . . 26
- 2.2 Flux du champ 27
 - Eq. de Maxwell-Thomson . . 27
 - Champ à flux conservatif . . 28
- 2.3 Potentiel vecteur 29
 - Définition 29
 - Équation de Poisson 30
 - Son expression 30
 - Méthodes de calcul 31
- 2.4 Relations de passage . . . 33
 - Courants surfaciques . . . 33
 - Composante normale . . . 33
 - Composante tangentielle . . 34
 - Le solénoïde infini 35
- 2.5 Résumé 37

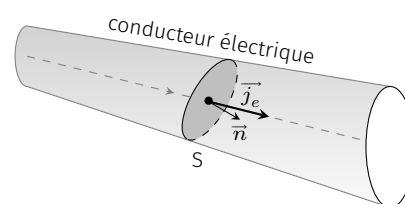


FIG. 2.1 : Flux électrique.

1 : Par exemple, la densité des porteurs de charge ou la densité volumique de courant ne dépendent que de l'espace.

2 : Voir la relation de continuité au Chapitre 4.

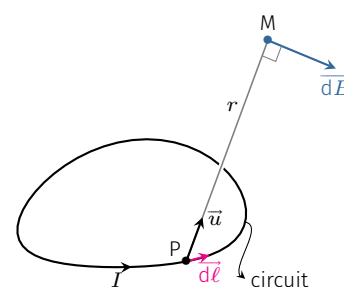


FIG. 2.2 : Notations associées à la loi de Biot et Savart.

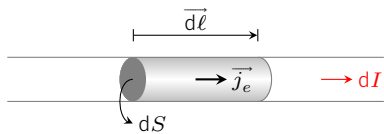


FIG. 2.3 : Tube de courant élémentaire dans lequel on isole une portion conductrice de volume $d\tau = dSd\ell$.

transporte un courant d'intensité $dI = \vec{j}_e \cdot \vec{n} dS$. La quantité $dI \vec{d\ell}$, parfois appelé élément de courant, s'écrit

$$\vec{dC} = dI \vec{d\ell} = \vec{j}_e \cdot \vec{n} dS \vec{d\ell} = \vec{j}_e dS d\ell = \vec{j}_e d\tau \quad (2.4)$$

Ainsi, en décomposant une distribution volumique en une superposition de distributions filiformes d'élément de courant $\vec{dC} = \vec{j}_e d\tau$, on obtient une nouvelle formulation :

Loi de Biot et Savart

Une distribution de courants permanents produit un champ magnétostatique \vec{B} donné par la loi

$$\vec{B} = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_e \wedge \vec{u}}{r^2} d\tau \quad \text{avec} \quad \text{div} \vec{j}_e = 0 \quad (2.5)$$

Expression dans laquelle il suffit de remplacer $\vec{j}_e d\tau$ par $I \vec{d\ell}$ pour une distribution filiforme.

L'intégrale (2.5) ne pose pas de problème de convergence pour les distributions réalistes, c'est-à-dire volumiques et finies. Toutefois, dans certaines situations idéalisées (distribution filiforme ou surfacique) l'intégrale n'est pas définie pour tout point situé sur la distribution.

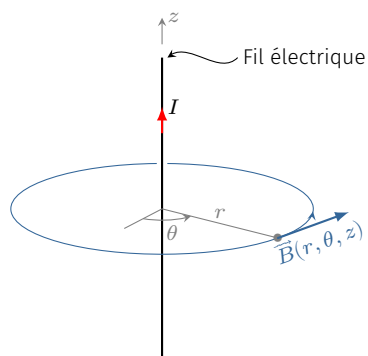


FIG. 2.4 : Fil infini rectiligne parcouru par un courant électrique permanent.

Théorème d'Ampère

La loi de Biot et Savart relie le courant électrique au champ magnétique via un intermédiaire de calcul (\vec{dB}) que l'on somme le long du circuit électrique. Le théorème d'Ampère est une autre manière d'exprimer ce lien en faisant intervenir la circulation du champ magnétique.

Pour illustrer cette propriété, considérons un conducteur rectiligne infini parcouru par un courant permanent d'intensité I . Comme on l'a vu dans la première partie de ce cours, il règne autour d'un tel conducteur un champ magnétique orthoradial dont l'intensité décroît proportionnellement à l'inverse de la distance au fil électrique. Formellement on a en coordonnées cylindriques

$$\vec{B}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

lorsque le fil est confondu avec l'axe orienté (Oz).

Dessignons maintenant un contour C , fermé et orienté, puis calculons la circulation du champ \vec{B} le long de C (FIG. 2.5). On rappelle qu'en coordonnées cylindriques, le déplacement infinitésimal s'écrit $d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$. On a donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta$$

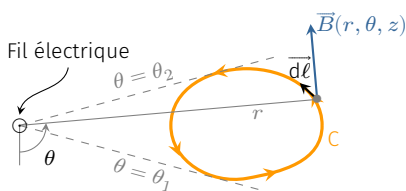


FIG. 2.5 : Circulation du champ magnétique à travers un circuit C orienté.

À partir de là, distinguons deux cas :

1. C se referme sans enlacer le fil conducteur;
2. C se referme en enlaçant au moins une fois le fil électrique.

Dans le premier cas, θ augmente à partir de θ_1 puis diminue à partir de θ_2 jusqu'à retrouver sa valeur initiale. Par conséquent, $\oint d\theta = 0$: la circulation de \vec{B} est nulle si C n'enlace pas le fil électrique. Dans

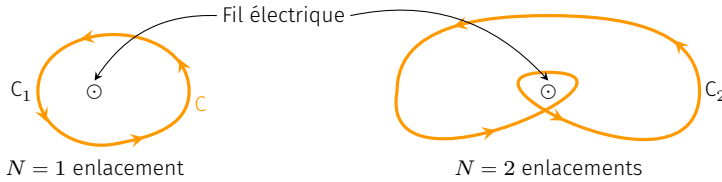


FIG. 2.6 : Différents enlacements. Le circuit C_1 enlace une fois le fil électrique alors que C_2 l'enlace deux fois.

le second cas, θ croît entre 0 et 2π pour $N = 1$ enlacement, entre 0 et 4π pour $N = 2$ enlacements, en général entre 0 et $2N\pi$ après N enlacements. On a donc

$$\oint_0^{2N\pi} d\theta = 2N\pi \quad \text{soit} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 NI$$

La circulation du champ magnétique créé par un fil rectiligne infini ne dépend pas de la forme de C mais uniquement du nombre d'enlacements autour du conducteur ainsi que l'intensité électrique. Cette propriété étonnante, recèle une autre surprise : elle s'avère générale, c'est-à-dire valable pour **tous les circuits électriques**³.

3 : Pour une démonstration voir [3].

Théorème d'Ampère pour une distribution filiforme

Une distribution de courants filiformes permanents crée un champ magnétostatique dont la circulation le long d'un circuit C fermé quelconque vaut

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_e \tag{2.6}$$

où I_e est la somme algébrique des intensités parcourant les fils enlacés par C.

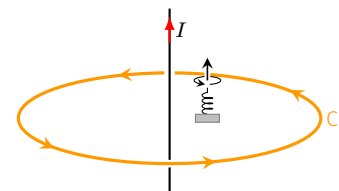


FIG. 2.7 : Le courant enlacé est compté positivement ici.

Notez que I_e est une quantité *algébrique* qui dépend du sens du courant et de l'orientation du circuit C. Si le courant enlacé a le même sens que la progression d'un tire-bouchon tournant dans le sens du circuit C, alors I_e est compté positivement. Dans le cas contraire, il est compté négativement.

Exercice – La FIG. 2.8 représente un circuit électrique produisant un champ magnétique. Que vaut la circulation du champ magnétique le long du cercle C orienté ?

Rép. $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -4\mu_0 I$

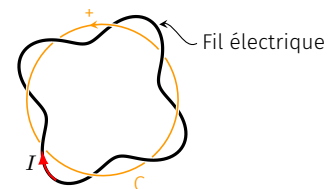


FIG. 2.8 : Circulation à calculer

Dans le cas d'une distribution non filiforme, il faut compter le flux électrique qui traverse le circuit C dans le sens indiqué par la règle du tire-bouchon. Autrement dit $I_e = \iint_S \vec{j}_e \cdot \vec{n} dS$ où S est une surface qui s'appuie sur C. Insistons sur le fait que toute surface convient, tant qu'elle s'appuie sur C. En effet le flux de \vec{j}_e à travers S ne dépend

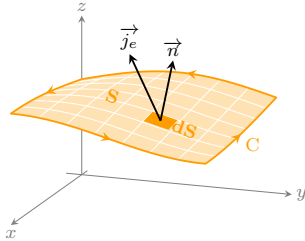


FIG. 2.9 : Calcul du courant enlacé en termes de densité de courant.

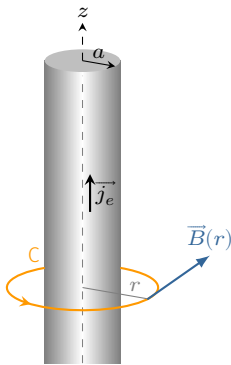


FIG. 2.10 : Conducteur cylindrique de rayon a parcouru par un courant axial uniforme et permanent.

que du contour qui délimite S ; c'est la conséquence du fait que \vec{j}_e est à flux conservatif ($\text{div}\vec{j}_e = 0$).

Théorème d'Ampère pour une distribution volumique

Une distribution de courants permanents de densité volumique \vec{j}_e crée un champ magnétostatique dont la circulation le long d'un circuit C fermé quelconque vaut

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j}_e \cdot \vec{n} dS \quad (2.7)$$

où S est une surface qui s'appuie sur C et \vec{n} un vecteur unitaire normal à dS et orienté *via* la règle du tire-bouchon.

Application – Fil rectiligne de section non négligeable

Considérons un conducteur cylindrique de rayon a parcouru par un courant électrique uniforme et axial (suivant Oz) d'intensité I . Ce problème présente une grande symétrie puisque tout plan contenant l'axe du cylindre est un plan de symétrie de la distribution de courant. Par conséquent le champ magnétique \vec{B} est orthoradial. Par ailleurs, la symétrie cylindrique rend le champ magnétique invariant vis à vis de z et θ :

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$$

Dans des situations comme celle-ci où la structure du champ est assez simple, on peut utiliser le théorème d'Ampère pour calculer B . Ici, par exemple, il suffit d'appliquer le théorème d'Ampère en choisissant un contour C circulaire d'axe (Oz) et de rayon r (FIG. 2.10). Calculons la circulation de \vec{B} le long de C :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B(r) dl = B(r) \oint dl = B(r) \times 2\pi r$$

Quant au courant enlacé, il dépend de la taille de C :

- si $r \geq a$ alors $I_e = I$;
- si $r < a$ alors $I_e = \iint \vec{j}_e \cdot \vec{n} dS = j_e \pi r^2$ avec $j_e = I/(\pi a^2)$.

Le théorème d'Ampère donne immédiatement $B(r)$:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{si } r \geq a \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & \text{si } r < a \end{cases}$$

On note que le champ magnétique créé à l'extérieur du cylindre conducteur est identique à celui d'un courant rectiligne filiforme de même intensité.

Équation de Maxwell-Ampère statique

Le théorème d'Ampère peut prendre une forme locale si l'on se souvient de la formule de Stokes :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

avec S s'appuyant sur C .

Prenons comme champ vectoriel le champ magnétostatique \vec{B} et utilisons le théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \iint_S \vec{j}_e \cdot \vec{n} dS$$

Pour que la dernière égalité soit réalisée pour toute surface il faut nécessairement

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_e \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_e \quad \heartsuit \quad (2.8)$$

Cette relation est appelée *équation de Maxwell-Ampère statique*, car elle n'est valable qu'en régime stationnaire. Nous verrons ultérieurement qu'elle viole le principe de conservation de la charge en régime variable; il faudra alors procéder à une modification de cette équation pour l'étendre à tous les régimes.

2.2 Flux du champ magnétostatique

Équation de Maxwell-Thomson

Montrons, à l'aide de la relation de Biot et Savart, que $\text{div} \vec{B} = 0$. Plaçons nous dans le contexte d'une distribution filiforme⁴ :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

On cherche à calculer la divergence de \vec{B} , c'est-à-dire

$$\text{div} \vec{B}(M) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Où l'on dérive par rapport aux *coordonnées de M*. Dans la formule de Biot et Savart, l'intégrale ne concerne pas le point M ⁵; on peut donc intervertir l'ordre des opérations :

$$\text{div} \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{div} \left(\oint_C \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \text{div} \left(\frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} \right)$$

Utilisons maintenant l'identité $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}$ en prenant $\vec{A} = d\vec{\ell}$ et $\vec{B} = \vec{u}/r^2$:

$$\text{div} \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\oint_C \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot \text{rot} d\vec{\ell} - \oint_C \text{rot} \left(\frac{\vec{u}}{r^2} \right) \cdot d\vec{\ell} \right]$$

La première intégrale est nulle, car $d\vec{\ell}$ ne dépend pas de M ⁶ on a $\text{rot} d\vec{\ell} = \vec{0}$. La seconde intégrale est également nulle car $\text{rot}(\vec{u}/r^2) = \vec{0}$. En effet, \vec{u}/r^2 est un gradient⁷, et le rotationnel d'un gradient est nul! Finalement, on établit la relation

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \heartsuit \quad (2.9)$$

4 : Le résultat est identique pour une distribution volumique. On laisse au lecteur le soin de le montrer en exercice.

5 : On intègre selon les coordonnées (x', y', z') d'un point P qui parcourt le circuit.

6 : $d\vec{\ell} = dx' \vec{u}_x + dy' \vec{u}_y + dz' \vec{u}_z$.

7 : Souvenez-vous du fait que le champ électrique d'une charge ponctuelle est en \vec{u}/r^2 et dérive d'un gradient en $1/r$. Précisément il est facile de montrer que $\vec{u}/r^2 = -\text{grad}(1/r)$.

8 : Plus précisément, si deux champs \vec{B}_1 et \vec{B}_2 sont solutions des équations (2.8) et (2.9) alors leur différence est un champ de rotationnel nul et de divergence nulle, c'est-à-dire un champ uniforme. Aussi les deux équations de Maxwell déterminent le champ magnétique à un champ uniforme près.

Il s'agit de l'équation de Maxwell-Thomson qui restera valide en régime variable.

Les équations (2.8) et (2.9) déterminent le champ magnétique de façon univoque pour une distribution de courant donné⁸.

Champ à flux conservatif

Rappelons que le flux magnétique à travers une surface S est la quantité

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface S. Le flux magnétique s'exprime en weber (Wb) et joue un rôle important dans les phénomènes d'induction.

Choisissons une surface fermée S et orientons \vec{n} vers l'extérieur de S : ϕ_B désigne alors le flux magnétique sortant. En vertu du théorème de la divergence et de l'équation de Maxwell-Thomson (2.9), on a

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \, dS = \iiint_V \text{div} \vec{B} \, d\tau = 0$$

On dit que \vec{B} est un champ vectoriel à flux conservatif. Ainsi contrairement à la situation que l'on peut observer en électrostatique, les lignes du champ \vec{B} ne peuvent pas toutes sortir d'une surface fermée ; certaines doivent y entrer pour produire un flux net rigoureusement nul. En conséquence, un point⁹ d'où émergerait des lignes de champ, à l'instar de la charge électrique pour le champ électrique, ne peut être observé.

9 : Un tel point source de champ magnétique est appelé *monopôle magnétique* et est exclu de la théorie de Maxwell. Certaines théories postulent l'existence de monopôles magnétiques, mais à l'heure actuelle rien ne permet de penser qu'ils existent.

Une autre conséquence est que le flux magnétique à travers une surface non fermée S ne dépend que du circuit C sur lequel s'appuie S¹⁰. En effet, choisissons un contour orienté C et deux surfaces S₁ et S₂ s'appuyant sur C (Fig. 2.11). Par construction, la réunion S des deux surfaces est une surface fermée ; on a donc

10 : On a la même conséquence pour le vecteur densité de courant en régime permanent puisque $\text{div} \vec{j}_e = 0$.

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \, dS = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \, dS + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \, dS = 0$$

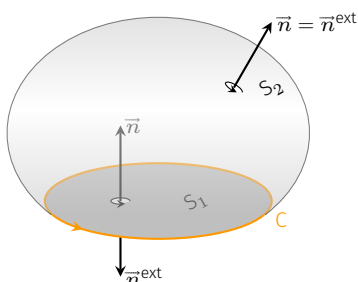


FIG. 2.11 : Le flux magnétique ne dépend que du contour C et du champ magnétique.

Orientons par exemple C de sorte que $\vec{n} = \vec{n}^{\text{ext}}$ pour S₂. Dans ce cas, $\vec{n} = -\vec{n}^{\text{ext}}$ pour S₁ et il vient :

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$

ceci, quelles que soient les surfaces S₁ et S₂, pourvu qu'elles s'appuient sur le même contour. Autrement dit le flux magnétique ne dépend que du champ magnétique et de la forme du contour.

2.3 Potentiel vecteur

Définition

Nous avons vu en électrostatique que \vec{E} est un gradient, car $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$. En magnétostatique, \vec{B} est de divergence nulle ce qui est le propre de tout champ rotationnel :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \heartsuit \quad (2.10)$$

Le champ vectoriel \vec{A} s'appelle le **potentiel vecteur**.

Exemple

Prenons $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x, y, z) \end{pmatrix}$ où f est une fonction de classe C^2 . Calculons son rotationnel puis vérifions qu'on obtient bien un champ de divergence nulle. On a

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et la divergence de ce champ rotationnel vaut

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$$

Or, en vertu du théorème de Schwarz, une dérivation partielle à l'ordre 2 ne dépend pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation. On en déduit ici que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$.

Le potentiel vecteur s'exprime en T.m ou en Wb/m. Il y a en effet un lien entre le flux magnétique et la circulation du potentiel vecteur :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \phi_B \quad \heartsuit \quad (2.11)$$

où l'on voit manifestement, comme on l'a déjà signalé, que le flux magnétique ne dépend que de la forme du contour et du champ magnétique¹¹.

À l'instar du potentiel électrostatique, \vec{A} est un *champ indéterminé*. Plus précisément, \vec{A} est défini à un gradient près. En effet, si \vec{A} est un potentiel vecteur associé au champ \vec{B} ($\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$), alors le champ $\vec{A} + \vec{\nabla} f$ convient aussi puisque

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{B}$$

Cette indétermination nous procure donc une certaine liberté dans le choix de \vec{A} . Un choix souvent réalisé en magnétostatique consiste à imposer $\text{div } \vec{A} = 0$. On dit qu'on se place dans la *jauge de Coulomb*.

¹¹ : le potentiel vecteur plus exactement.

Équation de Poisson

Nous avons déjà rencontré une équation reliant potentiel et sources en électrostatique; il s'agit de l'équation de Poisson de l'électrostatique :

$$\Delta V + \frac{\rho_e}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

On rencontre une équation du même type en magnétostatique en introduisant \vec{A} dans l'équation de Maxwell-Ampère statique (2.8) :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}_e$$

Utilisons l'identité $\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$. Par ailleurs, fixons-nous la jauge de Coulomb $\text{div} \vec{A} = 0$. L'équation de Maxwell-Ampère prend la forme d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, appelée *équation de Poisson de la magnétostatique* :

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j}_e = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \text{div} \vec{A} = 0 \quad \heartsuit \quad (2.12)$$

Expression du potentiel vecteur

Profitons de l'analogie avec l'équation de Poisson de l'électrostatique pour déterminer une expression du potentiel vecteur. Si l'on projette (2.12) suivant l'axe (Oz) on trouve une équation scalaire

$$\Delta A_z + \mu_0 j_{e,z} = 0 \quad \text{formellement analogue à} \quad \Delta V + \frac{\rho_e}{\epsilon_0} = 0$$

Or, on sait que $V = \iiint \frac{\rho_e}{4\pi\epsilon_0 r} d\tau$ est solution de l'équation de Poisson électrostatique. Par analogie, on en déduit que

$$A_z = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0 j_{e,z}}{4\pi r} d\tau$$

est *une* solution de l'équation de Poisson magnétostatique. Le même raisonnement peut se faire pour les trois composantes cartésiennes. En les regroupant on obtient une expression intégrale pour \vec{A} .

Expression du potentiel vecteur

Dans la jauge de Coulomb ($\text{div} \vec{A} = 0$), le potentiel vecteur est relié aux sources de courant *via*

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\vec{j}_e}{r} d\tau \quad (2.13)$$

Pour une distribution filiforme, l'intégrale est curviligne et $\vec{j}_e d\tau$ devient $I d\vec{\ell}$.

Rigoureusement, il faudrait vérifier que l'intégrale (2.13) présente bien une divergence nulle. On montre que c'est bien le cas pour une distribution d'extension finie ([4]p.106).

On montre que pour une *distribution finie*, volumique ou surfacique, le potentiel vecteur est défini et continu en tout point. C'est le cas

aussi pour les distributions linéiques, sauf sur la distribution où l'intégrale n'est pas calculable. C'est avec les distributions infinies qu'il faut manipuler l'intégrale avec précaution, car il arrive souvent qu'elle diverge.

Propriétés de symétrie – Comme on peut le voir dans l'expression (2.13), \vec{A} se comporte, du point de vue des symétries, comme un vecteur polaire puisque c'est la somme de vecteurs polaires (\vec{j}_e). Il vérifiera donc les mêmes propriétés que le champ électrique.

Symétries du potentiel vecteur

- En tout point d'un plan de symétrie, le potentiel vecteur est contenu dans ce plan.
- En tout point d'un plan d'anti-symétrie, le potentiel vecteur est perpendiculaire à ce plan.

Méthodes de calcul

Jusqu'ici, pour déterminer le champ magnétique on pouvait procéder :

- soit à un calcul direct à l'aide de la loi de Biot et Savart;
- soit à l'application du théorème d'Ampère sur un contour judicieusement choisi, ce qui suppose la présence d'un grand nombre de symétries dans la distribution.

Dorénavant, l'existence du potentiel vecteur \vec{A} nous procure un autre moyen d'accéder au champ magnétique :

- soit on procède à un calcul directe de \vec{A} via (2.13) pour déduire ensuite $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$;
- soit on résout l'équation de Poisson (2.12) puis on accède à \vec{B} .

Pour illustrer notre propos, reprenons l'étude du conducteur cylindrique de rayon a transportant un courant uniforme et axial de densité j . Nous avons déjà expliqué comment le théorème d'Ampère permet de déterminer le champ magnétique ici. Tentons d'obtenir le même résultat en passant par le calcul du potentiel vecteur. On a le choix entre un calcul intégral et une équation aux dérivées partielles. Ici l'équation de Poisson est le choix le plus sage, car l'intégrale (2.13) diverge (la distribution est indéfinie).

Avant de commencer, réduisons le problème à l'aide des symétries. On constate que tout plan perpendiculaire à l'axe (Oz) est un plan antisymétrique. Il en résulte que \vec{A} est perpendiculaire à ce plan, c'est-à-dire dirigé suivant l'axe (Oz) :

$$\vec{A} = A_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

La jauge de Coulomb impose $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$; autrement dit le potentiel vecteur ne dépend pas de z . Il ne dépend pas non plus de θ comme on peut le voir à partir de l'expression du champ magnétique. En effet,

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \vec{u}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\theta$$

Remarque : si l'on cherche à déterminer la valeur de \vec{B} en un point particulier M_0 , la méthode qui consiste à passer par \vec{A} est inadaptée, car elle demande de connaître \vec{A} dans la région autour du point M_0 avant d'effectuer les dérivations qui mèneront à la valeur de \vec{B} . Le calcul direct de \vec{B} est dans ce cas beaucoup plus adapté.

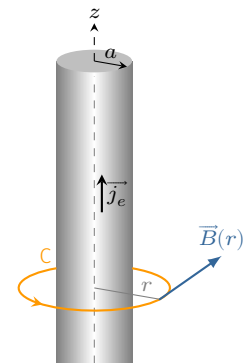


FIG. 2.12 : Fil conducteur rectiligne de section non négligeable.

On peut aussi simplement constater que d'après (2.13), \vec{A} est une somme de vecteurs colinéaires à \vec{u}_z ; le résultat est forcément suivant \vec{u}_z

Rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

et pour des raisons de symétrie, le champ magnétique est orthoradial. Il en découle $\frac{\partial A_z}{\partial \theta} = 0$: le potentiel vecteur ne dépend finalement que de r . Écrivons maintenant l'équation de Poisson :

Expression du laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > a \\ -\mu_0 j_e & \text{si } r \leq a \end{cases}$$

Intégrons deux fois de suite la première équation ($r > a$). On trouve

$$A_z(r) = C_1 \ln(r) + \cancel{C_2} \quad \text{pour } r > a$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration. On ne perd pas en généralité en posant $C_2 = 0$ puisque le champ magnétique n'en dépend pas. Passons à la deuxième relation et multiplions là par r .

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -\mu_0 j_e r \quad \text{si } r \in]0, a]$$

En intégrant une fois, on obtient

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{1}{2} \mu_0 j_e r + \frac{\cancel{C_3}}{r}$$

où le dernier terme en C_3/r est forcément nul si l'on veut éviter que le champ magnétique diverge à l'approche de l'axe. En intégrant à nouveau, on aboutit à

$$A_z(r) = -\frac{1}{4} \mu_0 j_e r^2 + C_4 \quad \text{si } r \leq a$$

Il nous reste à déterminer les deux constantes C_1 et C_4 en utilisant la continuité des champs en $r = a$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \mu_0 j_e a^2 + C_4 &= C_1 \ln a && \text{continuité de } \vec{A} \\ \frac{1}{2} \mu_0 j_e a &= -\frac{C_1}{a} && \text{continuité de } \vec{B} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

On en déduit $C_1 = -\frac{1}{2} \mu_0 j_e a^2$ et $C_4 = \mu_0 j_e a^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln a \right)$. Le potentiel vecteur est donc donné par

$$A_z^{\text{int}} = -\frac{1}{4} \mu_0 j_e (r^2 - a^2) - \frac{1}{2} \mu_0 j_e a^2 \ln a \quad \text{et} \quad A_z^{\text{ext}} = -\frac{1}{2} \mu_0 j_e a^2 \ln r$$

Le champ magnétique s'obtient sans difficulté :

$$\vec{B} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 j_e r \vec{u}_\theta & \text{si } r \leq a \\ \frac{1}{2} \mu_0 j_e \frac{a^2}{r} \vec{u}_\theta & \text{si } r > a \end{cases}$$

On laisse le lecteur vérifier l'adéquation de ce résultat avec celui de la 2.1.

2.4 Relations de passage du champ magnétique

Si les courants sont distribués en surface, le champ magnétique n'est plus défini sur la distribution. Des relations de passage permettent de relier le champ magnétostatique d'un point situé juste en dessous avec celui situé juste au dessus.

Courants surfaciques

Dans certaines situations, les courants qui interviennent sont répartis à l'intérieur d'une mince couche dont il est tentant de négliger l'épaisseur. On décrit alors cette *nappe de courant* par la notion de *densité de courant surfacique*.

Soit dI , l'intensité du courant qui traverse une section rectangulaire ($d\ell \times a$) de la nappe de courant. On a

$$dI = d\ell \int_0^a j_e(z) dz$$

où la densité volumique de courant j dépend éventuellement de z . Dans une schématisation surfacique, tout se passe comme si l'on faisait tendre $a \rightarrow 0$ et $j_e \rightarrow \infty$ de façon à ce que l'intégrale reste finie. On écrira alors

$$dI = j_s \times d\ell \quad \heartsuit \quad (2.14)$$

où j_s est par définition la densité de courant surfacique. Cette grandeur s'exprime en A.m^{-1} .

Le **vecteur densité de courant surfacique** \vec{j}_s est simplement un vecteur orienté dans le sens du courant et de norme $j_s = dI/d\ell$.

Exercice – Un cylindre creux de diamètre 10 mm et d'épaisseur négligeable transporte un courant axial et uniforme d'intensité $I = 10 \text{ A}$. Que vaut j_s ?

Rép. $j_s = 318 \text{ A.m}^{-1}$

Les formules intégrales qui donnent l'expression de \vec{B} et \vec{A} sont fournies pour des distributions volumiques. Si une modélisation surfacique se justifie, il suffira alors de remplacer les intégrales triples par des intégrales doubles et le terme $\vec{j}_e d\tau$ par $\vec{j}_s dS$. Toutefois, le champ magnétique ne sera plus défini en un point de la surface et pourra présenter une discontinuité.

Continuité de la composante normale

On a vu au chapitre précédent que la composante normale du champ électrostatique subit une discontinuité au passage d'une surface chargée. On a obtenu ce résultat en appliquant le théorème de Gauss sur

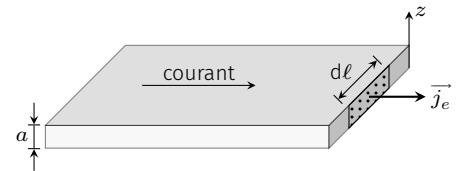


FIG. 2.13 : Nappe de courant.

un petit cylindre coupant perpendiculairement la surface chargée. Le résultat était le suivant

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \iff (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0}$$

Ici, le champ magnétostatique est à flux conservatif. Il en découle qu'un raisonnement similaire aboutit au résultat suivant :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \iff (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$$

Relation de passage

La composante normale du champ magnétostatique est continue lors de la traversée d'une nappe de courant.

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \tag{2.15}$$

Discontinuité de la composante tangentielle

Le résultat de l'électrostatique concernant la composante tangentielle peut se résumer ainsi :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \iff E_{t2} = E_{t1}$$

Le champ magnétostatique n'étant pas de rotationnel nul, la composante tangentielle doit subir une discontinuité à la traversée d'une nappe de courant.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_e \iff B_{t2} \neq B_{t1}$$

Procédons de la même manière qu'en électrostatique, en considérant un contour rectangulaire coupant perpendiculairement une surface S transportant un courant de densité \vec{j}_s . Le théorème d'Ampère se

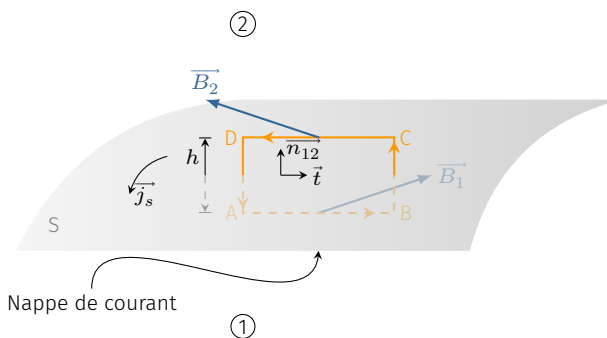


FIG. 2.14 : Contour rectangulaire coupant une nappe de courant.

traduit par

$$\oint_{(ABCD)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{[AB]} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[BC]} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[CD]} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[DA]} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int \vec{j}_s \cdot \vec{n} \, d\ell$$

Appelons h la largeur du rectangle et ℓ sa longueur. Si l'on fait tendre $h \rightarrow 0$, le deuxième et le quatrième terme disparaissent. Par ailleurs, choisissons ℓ assez petit pour pouvoir considérer le champ magnétique uniforme le long des tronçons rectilignes. On obtient alors l'équation

$$\vec{B}_1 \cdot (\ell \vec{t}) - \vec{B}_2 \cdot (\ell \vec{t}) = \mu_0 \int \vec{j}_s \cdot \vec{n} d\ell$$

où \vec{n} est le vecteur normal à la section rectangulaire défini par $\vec{n} = \vec{t} \wedge \vec{n}_{12}$. Pour les mêmes raisons que précédemment, la densité de courant est uniforme sur la section. On a donc

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{t} - \vec{B}_2 \cdot \vec{t} = \mu_0 \vec{j}_s \cdot \vec{n}$$

La composante tangentielle subit donc une discontinuité. Plaçons le contour de façon à ce que le courant le traverse perpendiculairement. Dans ce cas, \vec{j}_s est colinéaire à \vec{n} et $B_{1t} - B_{2t} = \mu_0 j_s$.

Relation de passage du champs magnétostatique

À la traversée d'une nappe de courant stationnaire, le champ magnétique présente une *continuité* de sa composante normale et une *discontinuité* de sa composante tangentielle que l'on peut résumer par :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}) \tag{2.16}$$

Le solénoïde infini

Réalisons un solénoïde à partir d'une feuille conductrice disposée autour d'un cylindre de rayon a , et parcourue par un courant orthoradial $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_\theta$ uniforme et stationnaire. Cherchons l'expression du champ magnétique créé par cette distribution lorsque le cylindre est infini. Pour cela, nous utiliserons les équations locales associées aux relations de passage.

Tout d'abord, notons (Oz) l'axe de symétrie du cylindre et adoptons le système de coordonnées cylindriques (Fig. 2.15). Tout plan perpendiculaire au cylindre est un plan de symétrie de la distribution de sorte que le champ magnétique est nécessairement axial. De plus, l'invariance de la distribution par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation suivant z implique que l'intensité du champ magnétique varie seulement avec la coordonnée radiale r . Pour résumer,

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$$

Appliquons la relation de Maxwell-Ampère là où le champ magnétique est défini :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_e = \vec{0} \quad \text{pour } r > a \quad \text{ou } r < a$$

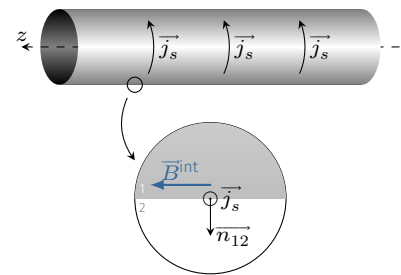


FIG. 2.15 : Solénoïde infini.

ce qui donne

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$$

Le champ magnétique garde donc une valeur constante dans les deux régions définies par $r > a$ et $r < a$. On conçoit que si l'on se place à l'infini et à l'extérieur du solénoïde, le champ est nul¹². On a donc

$$\vec{B}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}^{\text{int}} = \vec{c}^{\text{te}}$$

12 : Si cet argument ne vous convainc pas (après tout une nappe de courant infini ne produit pas un champ nul à l'infini), vous pouvez imaginer une bobine torique. Il est alors facile de montrer à l'aide du théorème d'Ampère que le champ magnétique est nul à l'extérieur ceci quel que soit le rayon du tore. Le solénoïde infini pouvant être vu comme une bobine torique de très grand rayon.

13 : On peut remarquer que ce résultat reste encore valide pour un solénoïde de section non circulaire

Les relations de passage permettent de déterminer la valeur du champ intérieur. En effet, au voisinage de la nappe de courant, d'après (2.16), on a

$$\vec{B}^{\text{ext}} - \vec{B}^{\text{int}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} = -\mu_0 j_s \vec{u}_z$$

Finalement, un solénoïde infini produit un champ uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur¹³ :

$$\vec{B}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}^{\text{int}} = \mu_0 j_s \vec{u}_z \quad \heartsuit \quad (2.17)$$

On peut approcher un solénoïde infini en enroulant du fil électrique autour d'un long cylindre. On enroulera de façon jointive les spires pour avoir un courant uniforme, et l'on prendra du fil très fin pour pouvoir négliger l'hélicité de l'enroulement : le courant transporté est alors quasi-orthoradial. On peut relier le courant surfacique avec la densité d'enroulement n (en spires par mètre) et l'intensité I_0 du courant transporté par le fil. En effet, à travers une section de longueur ℓ , passe un courant d'intensité

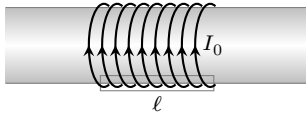


FIG. 2.16 : Enroulement solénoïdal.

$$I = I_0 \times n \times \ell = j_s \ell$$

Cette bobine est donc équivalente à une nappe de courant solénoïdale de densité de courant surfacique $j_s = nI_0$ (A/m). On en déduit le champ créé par une bobine infinie :

$$\vec{B}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}^{\text{int}} = \mu_0 n I_0 \quad \heartsuit \quad (2.18)$$

14 : Pour une démonstration basée sur l'intégration du champ créé par les spires, voir le recueil d'exercices [Électromagnétisme-1ere Partie](#)

On retrouve l'expression vu dans la première partie de ce cours¹⁴

2.5 Résumé

Récapitulons les connaissances acquises à travers la TAB. 2.1 montrant les similitudes et différences entre les champs électrostatique et magnétostatique.

TAB. 2.1 : Résumé des propriétés des champs électrostatique et magnétostatique.

Propriétés intrinsèques	
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$	$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0$
ou	ou
$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ (Eq. Maxwell-Faraday)	$\text{div } \vec{B} = 0$ (Eq. Maxwell-Thomson)
Lien entre les sources	
$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}$ (Th. de Gauss)	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_e$ (Th. d'Ampère)
ou	ou
$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$ (Eq. Maxwell-Gauss)	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_e$ (Eq. Maxwell-Ampère)
$\vec{E}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho_e(P) \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 PM^2} d\tau$	$\vec{B}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\mu_0 \vec{j}_e(P) \wedge \vec{u}}{4\pi PM^2} d\tau$
Potentiels	
$\vec{E}(M) = -\text{grad } V(M)$	$\vec{B}(M) = \text{rot } \vec{A}(M)$
$V(M) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho_e(P)}{4\pi\epsilon_0 PM} d\tau$	$\vec{A}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\mu_0 \vec{j}_e(P)}{4\pi PM} d\tau$ (Jauge de Coulomb)
Équations de Poisson	
$\Delta V + \frac{\rho_e}{\epsilon_0} = 0$	$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j}_e = \vec{0}$ (Jauge de Coulomb)
Relations de Passage	
$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$	$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12})$

Ce chapitre est consacré à l'étude du mouvement des charges électriques dans un conducteur, éventuellement mobile, en présence d'un champ électromagnétique susceptible de varier dans le temps. L'ensemble des phénomènes électriques qui apparaissent est appelé **induction électromagnétique**.

Nous présenterons d'abord les lois qui découlent des travaux de Faraday et Lenz, puis nous verrons comment la théorie électromagnétique intègre ces phénomènes dans un cadre plus large que celui étudié jusqu'ici.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/induction-electromagnetique.php>

3.1 Approche historique . . .	39
Faits expérimentaux . . .	39
Loi de Lenz-Faraday . . .	40
Loi de modération de Lenz	42
Conversion d'énergie . . .	43
Flux propre	43
3.2 Induction de Lorentz . . .	44
Champ électromoteur . .	44
Généralisation	46
Freinage	47
3.3 Induction de Neumann .	49
Éq. de Maxwell-Faraday .	49
Potentiel (V, A)	49
Chauffage par induction .	51
3.4 Bilan et discussions . . .	52
ARQS	52
Discussion	53

3.1 Approche historique

Faits expérimentaux

Après la découverte d'Ørsted sur la possibilité de produire un champ magnétique à partir de l'électricité, on s'est bien entendu mis à la recherche de la possibilité inverse : produire de l'électricité à partir d'un champ magnétique. Michael Faraday, après de nombreuses tentatives infructueuses, parvint à ses fins en 1831, et découvrit qu'il est possible d'induire un courant électrique dans un conducteur en le soumettant à un flux magnétique *variable*.

Voyons comment se manifeste ce phénomène sur quelques expériences simples.

Expérience n°1 – Formons un circuit électrique avec une spire conductrice et un galvanomètre¹. Approchons le pôle d'un aimant droit. Le galvanomètre nous signale la présence d'un courant électrique, dit **courant induit** tant que l'aimant se déplace. Une fois l'aimant immobilisé, le galvanomètre n'indique aucun courant. Si l'on retire l'aimant

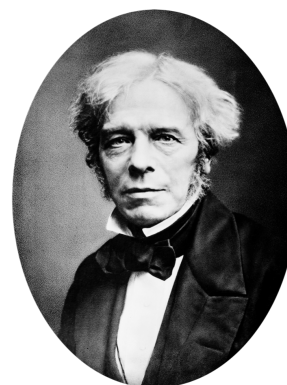


FIG. 3.1 : Mickael Faraday (1791-1867)

1 : Le galvanomètre est un appareil qui permet de mesurer de très faibles courants électriques, typiquement de l'ordre du nA.

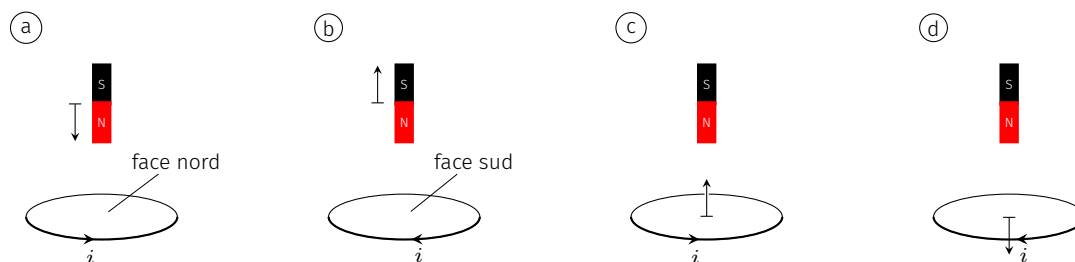


FIG. 3.2 : Expériences 1 et 2 (le galvanomètre n'est pas représenté).

Terminologie – on appelle *inducteur* la source de champ magnétique qui provoque le phénomène d'induction, et l'*induit* le circuit dans lequel apparaît le courant d'induction.

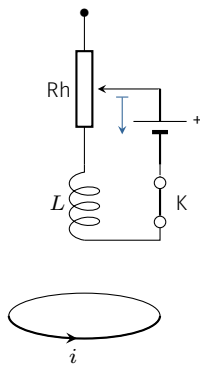


FIG. 3.3 : Un courant induit apparaît dans la spire lorsque l'on ouvre ou ferme l'interrupteur K, ou lorsque l'on déplace le curseur du rhéostat Rh.

dans un mouvement inverse, on observe à nouveau un courant électrique, mais cette fois-ci dans l'autre sens. Si l'on répète l'action plus rapidement, le courant induit par le mouvement est plus intense.

Expérience n°2 – Maintenons l'aimant fixe, puis déplaçons le circuit de sorte que le mouvement relatif soit le même que dans l'expérience précédente. Nous constatons le même phénomène de courants induits.

De ces deux expériences il en résulte que le mouvement relatif d'un inducteur par rapport à un circuit fermé provoque l'apparition d'un courant, dit courant d'induction.

Expérience n°3 – On peut également induire un courant sans qu'il y ait de mouvement relatif entre l'inducteur et l'induit. Par exemple, on peut remplacer l'aimant par une bobine alimentée par une source de tension comme l'illustre la FIG. 3.3. En déplaçant la curseur du rhéostat ou en fermant l'interrupteur, le galvanomètre détecte un courant induit.

Dans ces trois expériences, c'est à chaque fois la *variation du flux magnétique* qui est associée à l'apparition d'un courant induit.

Expérience n°4 – Terminons, en reprenant l'expérience n°1 mais en ouvrant le circuit : aucun courant ne peut circuler dans ce cas. Que se passe-t-il lorsque l'aimant est mis en mouvement ? Un voltmètre branché aux bornes de l'induit affiche une tension à chaque mouvement de l'aimant, et dont la polarité change quand le sens du mouvement change. Autrement dit, le circuit se comporte comme une pile de f.é.m e .

Conclusion

Toute variation de flux magnétique à travers un circuit provoque l'apparition d'une **force électromotrice induite** e . Le circuit est alors équivalent à une source de tension de f.é.m e :

- s'il est ouvert, la tension à ses bornes vaut e ;
- s'il est fermé, la f.é.m induite provoque la circulation d'un courant induit.

Loi de Lenz-Faraday

En 1834, Heindrich Lenz présente une formulation mathématique des résultats expérimentaux de Faraday.



FIG. 3.4 : Heindrich Lenz (1804-1865)

Loi de Lenz-Faraday

Toute variation de flux magnétique à travers un circuit C produit l'apparition d'une f.é.m d'induction e donnée par

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad \text{avec} \quad \phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \quad (3.1)$$

où e s'exprime en volts et ϕ_B en webers.

Le flux magnétique à travers un circuit peut varier pour différentes raisons.

- Le circuit peut se déformer ou se déplacer en présence d'un champ magnétique permanent; on parle alors d'induction de Lorentz.
- L'inducteur peut produire un champ magnétique variable à travers un circuit fixe; il s'agit d'induction de Neumann.

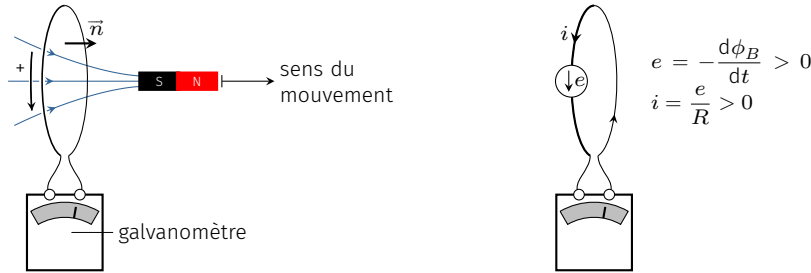


FIG. 3.5 : Orientation de la f.é.m et du courant induit. Ici le flux diminue, ce qui induit un courant circulant dans le sens positif. Une orientation différente du circuit ne changerait pas le sens réel du courant.

Le circuit siège d'un phénomène d'induction est équivalent à une source de tension polarisée, insérée dans le circuit. Pour déterminer son orientation, il faut au préalable choisir un sens d'orientation du circuit². Ce sens positif détermine celui du vecteur normal \vec{n} via la règle du tire-bouchon, ce qui permet de calculer le flux magnétique. Si $e > 0$, le générateur équivalent produit un courant dans le sens positif (cf. FIG. 3.5). Dans le cas contraire, le courant induit est orienté dans le sens négatif. La valeur de l'intensité est donnée par la loi d'Ohm $e = Ri$ où R est la résistance du circuit fermé.

2 : Ce choix est arbitraire.

Exemple

Une spire en forme de carré d'arête a est entraînée à la vitesse constante \vec{v} en direction de l'axe Ox . Dans l'espace $x > 0$ règne un champ magnétique \vec{B} uniforme perpendiculaire au plan de la spire. Exprimons l'intensité du courant induit en fonction de v, B et R la résistance électrique de la spire.

Commençons par orienter le circuit. Choisissons le sens ABCD. À ce sens de parcours, est associé le vecteur normal \vec{n} opposé au champ magnétique (FIG. 3.7). Appelons $x(t)$ l'abscisse du côté BC de la spire. Le flux magnétique à travers la spire s'écrit

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = - \iint_{\mathcal{D}} B dS = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -Bax(t) & \text{si } x \in [0, a] \\ -Ba^2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

D'après la loi de Faraday le circuit est équivalent à un générateur de f.é.m

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt} = \begin{cases} Bav & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce générateur en court-circuit induit un courant d'intensité

$$i = \frac{e}{R} = \begin{cases} \frac{Bav}{R} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2)$$

Un courant circule donc dans le sens positif durant l'entrée de la spire dans la zone magnétique.

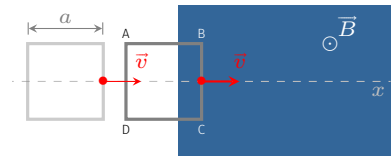


FIG. 3.6 : Cadre en mouvement uniforme dans un champ permanent.

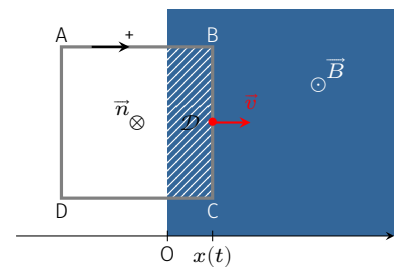


FIG. 3.7 : Choix d'orientations.

La loi de Lenz-Faraday ne précise pas quelle surface S choisir dans le calcul du flux magnétique; il suffit d'en choisir une qui s'appuie sur le circuit C . Par conséquent, la loi de Lenz-Faraday suppose implicitement la conservation du flux magnétique.

Loi de modération de Lenz

La présence du signe $-$ dans la loi de Lenz-Faraday a une signification profonde : elle décrit le comportement modérateur du phénomène d'induction et traduit comme nous allons le voir la conservation de l'énergie.

Pour illustrer ceci, reprenons l'exemple précédent. Nous avons montré que durant son entrée dans la zone magnétique, la spire est le siège d'un courant induit $i = Bav/R$. On constate alors deux choses.

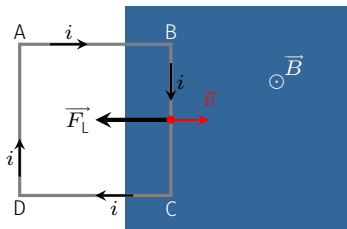


FIG. 3.8 : Freinage électromagnétique.

- D'une part, ce courant électrique produit lui même un champ magnétique dont le flux tend à atténuer la variation du flux à l'origine de ce courant. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette propriété est indépendante de la façon d'orienter le circuit.
- D'autre part, il provoque l'apparition d'une force de Laplace

$$\vec{F}_L = i \vec{BC} \wedge \vec{B} = -\frac{B^2 a^2}{R} \vec{v}$$

qui s'oppose au mouvement en exerçant un effet de freinage visqueux.

Ainsi, les effets électromagnétiques issus de l'apparition du courant induit ont tendance à modérer le phénomène d'induction en freinant la spire et atténuant la variation du flux total. Ces effets modérateurs permettent de prévoir le sens du courant induit et plus généralement la polarité de la f.é.m d'induction.

Loi de modération de Lenz

La polarité de la tension induite est telle que si le courant peut circuler, les effets qu'il génère s'opposent à la cause qui lui a donné naissance.

Cette loi reflète en réalité la conservation de l'énergie. Pour reprendre, l'exemple précédent, du fait de la force de freinage, l'opérateur doit produire un travail pour maintenir la vitesse de la spire constante. Le travail mécanique à fournir³ vaut

$$W = \int_{x=0}^{x=a} -\vec{F}_L \cdot d\vec{\ell} = \frac{B^2 a^3 v}{R}$$

Pendant le même temps, l'énergie électrique dissipée par effet joule vaut

$$W' = \int_{t=0}^{t=a/v} Ri^2 dt = R \times \left(\frac{Bav}{R}\right)^2 \times \frac{a}{v} = \frac{B^2 a^3 v}{R}$$

3 : L'opérateur exerce une force $\vec{F}_{op} = -\vec{F}_L$ si le vecteur vitesse est constant.

Comme on le constate, l'énergie électrique a été apportée par l'opérateur qui a dû pousser le cadre conducteur afin de maintenir sa vitesse constante. La loi de modération est le résultat de cette conversion d'énergie.

« Convert magnetism into electricity »

La découverte de l'induction a joué un rôle majeure dans le développement de l'électricité. On s'est vite rendu compte du potentiel de ce phénomène, notamment en matière de conversion d'énergie. De nos jours, l'un des convertisseurs le plus utilisé est l'*alternateur*. Il convertit l'énergie mécanique d'un *rotor* mis en mouvement (en général l'inducteur) en un courant alternatif au sein d'un *stator* (en général l'induit). On en trouve, dans les centrales électriques, les éoliennes, les voitures etc.

Donnons le principe simplifié d'un alternateur à induit mobile (rotor) : un cadre constitué de N enroulements d'un conducteur est mis en rotation par rapport à un champ magnétique uniforme et permanent. On suppose que le cadre est entraîné à une vitesse angulaire constante ω . Le flux magnétique qui traverse le rotor vaut

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = NS \vec{B} \cdot \vec{n} = NSB \cos(\theta)$$

où S est l'aire du cadre. Le mouvement angulaire est décrit par $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ de sorte que la f.é.m d'induction vaut

$$e(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = NSB\omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

L'induit se comporte comme une source de tension alternative de fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$ et d'amplitude $E = NSB\omega$. On note que plus le rotor tourne vite, plus l'amplitude de la tension est importante. Par exemple, dans un véhicule, l'alternateur étant entraîné par le moteur, on régule la valeur du champ magnétique⁴ de façon à éviter des surtensions qui pourraient endommager la batterie et les autres appareils consommateurs d'électricité.

Dans les centrales industrielles, la tension produite oscille à 50 Hz mais le rotor (l'inducteur) tourne moins vite, car il présente plusieurs paires de pôles magnétiques.

Flux propre et flux extérieur

Dans les exemples précédents, le flux magnétique est déterminé en intégrant uniquement le champ magnétique extérieur \vec{B} . Or, si un courant induit circule, il doit aussi produire un champ magnétique et donc un flux magnétique supplémentaire. On appelle ce flux, le **flux propre**. Rigoureusement, on doit écrire

$$\phi_B = \iint_S \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{n} dS + \iint_S \vec{B}_{\text{induit}} \cdot \vec{n} dS$$

Dans son carnet *Notes de chimie, idées, suggestions, et sujets de recherche*, Faraday met cette idée en tête d'une liste consacrée à l'électricité.

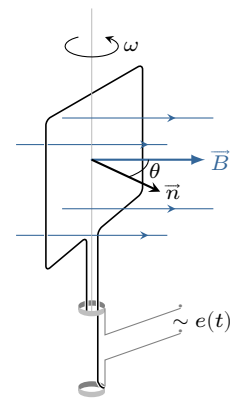


FIG. 3.9 : Schéma de principe d'un alternateur à induit mobile.

4 : Dans les alternateurs des voitures, le champ magnétique est produit par un électroaimant dont on peut piloter l'alimentation à l'aide d'un système de régulation. La tension produite par l'alternateur est bien sûr rendue continue par redressement électronique (ponts de diodes) pour pouvoir alimenter la batterie.

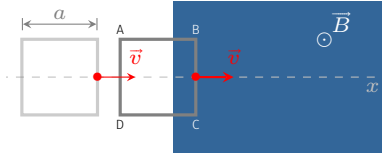


FIG. 3.10 : Cadre en mouvement uniforme dans un champ permanent.

Dans tout ce chapitre nous négligerons le flux propre devant le flux extérieur par soucis de simplicité. En conséquence, nos résultats ont un domaine de validité restreint.

Exemple

Reprenons l'exemple d'une spire entraînée à la vitesse constante \vec{v} entrant dans une zone où règne un champ magnétique \vec{B} uniforme perpendiculaire au plan de la spire. À quelle condition sur la vitesse, notre résultat (3.2) est-il correct ?

Pour cela estimons l'ordre de grandeur du flux propre :

$$\phi_{\text{propre}} \sim B_{\text{induit}} a^2 \sim \frac{\mu_0 i}{a} \times a^2$$

Tant que le flux propre est négligeable, on a $i = Bav/R$ ce qui donne $\phi_{\text{propre}} \sim \mu_0 Ba^2 v/R$. Le flux imposé étant de l'ordre de Ba^2 , le résultat (3.2) est une bonne approximation si

$$\frac{\mu_0 Ba^2 v}{R} \ll Ba^2 \quad \text{soit} \quad v \ll \frac{R}{\mu_0}$$

La solution (3.2) est donc exacte dans la limite $v \rightarrow 0$. Notez que la condition précédente n'est pas très contraignante : si l'on prend $R \sim 1 \Omega$ cela donne $v \ll 1 \cdot 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Nous verrons dans un prochain chapitre que le flux total doit s'écrire

$$\phi_B = \phi_{\text{ext}} + Li$$

où L désigne l'auto-inductance du circuit. Dans ce contexte, l'équation électrique prend la forme

$$e(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} - L \frac{di}{dt}$$

Négliger le flux propre revient donc à négliger l'auto-inductance.

3.2 Origine de l'induction de Lorentz

Champ électromoteur de Lorentz

Expérience

Une barre conductrice mobile est disposée sur deux rails conducteurs parallèles espacés de ℓ et reliés à un galvanomètre. Le rail et les fils de connexion présentent une résistance négligeable devant celle de la barre conductrice de sorte que la résistance du circuit ne varie pas lorsque la barre se déplace; on la note R .

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique permanent et uniforme. Entraînons la barre à la vitesse \vec{v} ; le galvanomètre indique alors l'apparition d'un courant induit dans le sens positif (FIG. 3.11).

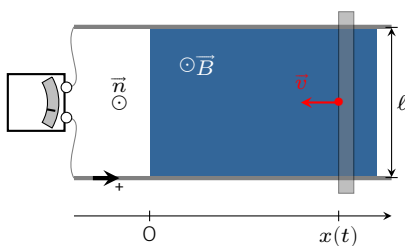


FIG. 3.11 : Expérience vue de dessus.

5 : Comme indiqué précédemment, l'auto-induction est négligée dans tout ce chapitre.

Que prévoit la loi de Lenz-Faraday ? – Compte tenu du choix d'orientation du circuit, le flux magnétique s'écrit⁵

$$\phi_B(t) = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = B\ell x(t)$$

on en déduit

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt} = B\ell v \quad \text{avec} \quad v = |\dot{x}| = -\dot{x}$$

Si l'on ferme le circuit, un courant induit d'intensité $i = e/R = B\ell v/R$ circule dans le sens positif comme observé expérimentalement. On peut vérifier qu'une force de freinage apparaît et que le courant induit tend à atténuer la variation du flux magnétique conformément à la loi de modération de Lenz.

Interprétation dans le référentiel du laboratoire – Considérons les électrons libres de la barre en mouvement. Un observateur dans le référentiel du laboratoire voit ces électrons animés, en moyenne, d'une vitesse \vec{v} en présence d'un champ magnétique \vec{B} . Apparaît alors une force magnétique $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ qui présente une composante non nulle le long de la barre conductrice. Aussi,

- si le circuit est ouvert (la barre n'est pas posée sur les rails), il y a accumulation de charges \ominus à une extrémité de la barre, et de charges \oplus à l'autre extrémité, d'où l'apparition d'une tension aux extrémités de la barre.
- si le circuit est fermé, les charges peuvent circuler; un courant induit circule dans le sens positif (les électrons se déplacent dans le sens négatif).

En résumé, le courant induit résulte du déplacement des porteurs de charges libres du conducteur sous l'action de la force de Lorentz. On retrouve qualitativement les conclusions déduites de la loi de Lenz.

Interprétation dans le référentiel lié au conducteur – Dans le cadre de la mécanique newtonienne, la force est un invariant galiléen. C'est pourquoi les porteurs de charge sont aussi soumis à la force $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ dans le référentiel lié à la barre. Cependant, les électrons étant immobiles⁶, cette force ne peut être que de nature électrique. Autrement dit, dans le référentiel lié à la barre, les électrons sont soumis à une force

$$\vec{f} = q\vec{E}_{em} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_{em} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Ce champ de nature électrique dans le référentiel lié à la barre est appelé **champ électromoteur**, car il met en mouvement les porteurs de charge. En circuit ouvert, ce champ électromoteur est responsable de l'accumulation des charges aux extrémités de la barre (cf. FIG. 3.12). Ces charges superficielles créent un champ électrostatique \vec{E} qui neutralise le champ électromoteur de façon à maintenir les électrons au repos :

$$\vec{E} + \vec{E}_{em} = \vec{0}$$

La barre est donc équivalente à un générateur de tension à vide

$$e = V_{\oplus} - V_{\ominus} = \int_{\oplus}^{\ominus} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\ominus}^{\oplus} \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} = vB\ell$$

On retrouve le même résultat que celui obtenu par la relation de Lenz-Faraday.

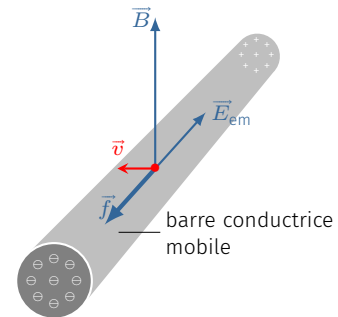


FIG. 3.12 : Accumulation des porteurs de charges aux extrémités de la barre en circuit ouvert.

6 : Rigoureusement, les électrons ne sont pas immobiles si un courant induit circule. Cependant, la force magnétique qui en découle n'ayant pas de composante le long du circuit, elle n'a pas d'effet électromoteur. En fait elle est à l'origine de l'effet Hall.

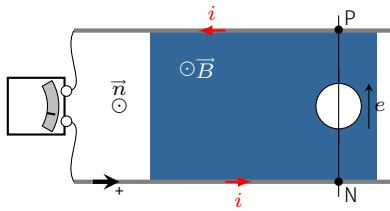


FIG. 3.13 : Le courant circule dans le sens du champ électromoteur.

Lorsque le circuit est fermé, ce champ électromoteur donne l'énergie nécessaire aux porteurs de charges pour vaincre l'effet du champ électrostatique ainsi que les effets dissipatifs liés à l'effet Joule. La tension aux bornes de la barre vaut alors

$$U_{PN} = e - Ri$$

où R est la résistance de la portion PN de la barre conductrice.

Résumé

Dans le référentiel lié à la barre mobile, les porteurs de charge sont soumis à un champ électrique dont une composante, appelée champ électromoteur de Lorentz et noté \vec{E}_{em} , est responsable de l'apparition de la f.é.m d'induction. On a

$$\vec{E}_{em} = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad e = \oint \vec{E}_{em} \cdot d\vec{\ell}$$

Généralisation

Le résultat précédent se généralise pour tout circuit filiforme en mouvement dans un champ magnétique uniforme.

Considérons un circuit C filiforme fermé de forme quelconque soumis à un mouvement et/ou à une déformation au cours du temps. Notons \vec{v}_p la vitesse de déplacement d'un point P du circuit C. La démonstration repose sur la conservation du flux magnétique

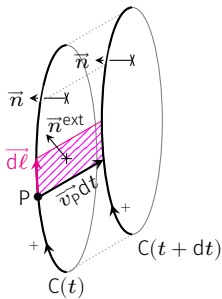


FIG. 3.14 : Le circuit balaye une surface Σ entre t et $t + dt$.

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{ext} d\vec{S} = 0 \tag{3.3}$$

Notons $\phi(t)$ le flux magnétique à travers C à l'instant t et $\phi(t + dt)$ celui à travers le circuit à l'instant $t + dt$. Lors de son déplacement, le circuit balaye une surface latérale Σ , de sorte que la réunion de Σ et de la surface des spires aux deux instants t et $t + dt$ forme une surface fermée. En vertu de (3.3) on a

$$\phi(t) - \phi(t + dt) + \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n}^{ext} dS = 0 \quad \text{avec} \quad \phi(t) = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

où le signe $-$ du deuxième terme provient de la convention d'orientation de \vec{n}^{ext} . Pendant dt , le flux magnétique à travers la spire varie donc de

$$d\phi = \phi(t + dt) - \phi(t) = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n}^{ext} dS$$

Exprimons l'élément de surface latérale en fonction de l'élément de parcours infinitésimal $d\vec{\ell}$ et \vec{v}_p : $\vec{n}^{ext} dS = \vec{v}_p dt \wedge d\vec{\ell}$. Il en découle,

$$d\phi = \left[\oint_{C(t)} \vec{B} \cdot (\vec{v}_p \wedge d\vec{\ell}) \right] dt = - \left[\oint_{C(t)} d\vec{\ell} \cdot (\vec{v}_p \wedge \vec{B}) \right] dt$$

Rappelons que la normale \vec{n}^{ext} est toujours dirigée vers l'extérieur de la surface fermée.

Rappel de math :
le produit mixte $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ est invariant par permutation circulaire

À retenir

La f.é.m induite par le déplacement d'un circuit dans un champ magnétique permanent \vec{B} s'interprète comme la circulation du champ électromoteur de Lorentz $\vec{E}_{em} = \vec{v}_p \wedge \vec{B}$ le long du circuit.

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \oint_{C(t)} (\vec{v}_p \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{C(t)} \vec{E}_{em} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.4)$$

Freinage électromagnétique

Comme on l'a déjà vu, le mouvement d'un circuit dans un champ magnétique fait apparaître des courants induits qui, par leurs effets, s'opposent au mouvement en développant une force de freinage de type visqueux.

Ce phénomène est mis à profit dans les dispositifs de freinage des poids lourds et des autocars. En général, un disque métallique entraîné par les roues passe dans l'entrefer d'un électroaimant fixe. Des courants induits apparaissent alors au sein du conducteur et dissipent une partie de l'énergie mécanique par effet Joule. La force de freinage qui en résulte dépend alors de la distribution de ces courants volumiques, appelés *courants de Foucault*. Celle-ci est assez compliquée à déterminer en général, mais on peut dégager les idées essentielles avec une géométrie simple.

Imaginons une plaque conductrice en translation à la vitesse \vec{v} dans une zone de largeur a où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire à la plaque. Le mouvement de la plaque induit un champ électromoteur

$$\vec{E}_{em} = \vec{v} \wedge \vec{B} = vB \vec{u}_y$$

Ce champ va mettre en mouvement les porteurs de charges dans la zone magnétique. En vertu de la loi d'Ohm, le vecteur densité de courant s'écrit

$$\vec{j}_e = \gamma \vec{E}_{em} = \gamma v B \vec{u}_y$$

Rappelons que pour une distribution volumique de courant, la force de Laplace s'écrit

$$\vec{F}_L = \iiint \vec{j}_e \wedge \vec{B} d\tau$$

En intégrant dans le volume où règne le champ magnétique, on obtient

$$\vec{F}_L = -\alpha_0 \vec{v} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = ael\gamma B^2$$

La force induite est une force de frottement de type visqueux, et le coefficient de frottement α varie comme le carré du champ magnétique. Dans les poids lourds, le champ magnétique est produit par un électroaimant; dès lors on peut contrôler la puissance du freinage via l'alimentation de l'électroaimant. Un tel dispositif présente les avantages suivants :

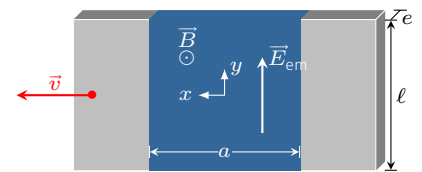


FIG. 3.15 : Plaque conductrice en mouvement dans un champ magnétique uniforme.

- le disque métallique qui subit le freinage ne subit pas d'usure mécanique, contrairement aux dispositifs classiques de freinage qui reposent sur la friction ;
- si la roue se bloque, la force de freinage disparaît; il n'y a donc aucun risque de dérapage.

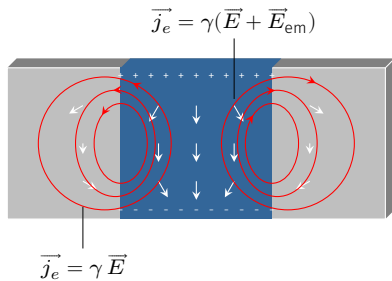


FIG. 3.16 : Allure des courants de Foucault (lignes orange). Les flèches blanche indiquent l'allure du champ électrostatique.

Le lecteur attentif aura sans doute remarqué une certaine incohérence dans le modèle précédent. En effet, le courant induit ne peut pas expulser les charges hors de la plaque conductrice. Par conséquent, on doit observer une accumulation de charges sur les bords de la plaque. Il en résulte l'apparition d'un champ électrostatique \vec{E} qui se superpose au champ électromoteur. On a donc plutôt

$$\vec{j}_e = \begin{cases} \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{em}) & \text{si } |x| < a/2 \\ \gamma \vec{E} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le champ électromoteur provoque la mise en circulation des courants de Foucault, et les charges statiques les guident *via* le champ électrostatique \vec{E} , de façon à refermer les lignes de courant sur elles-mêmes (FIG. 3.16). On montre que le champ électrostatique peut se mettre sous la forme

$$\vec{E} = vB [f(x, y) \vec{u}_x + g(x, y) \vec{u}_y]$$

La force de Laplace vaut alors

$$\vec{F} = \iiint \vec{j}_e \wedge \vec{B} d\tau = \gamma v B^2 \left(\vec{u}_y \iiint f(x, y) d\tau - \vec{u}_x \iiint (1 + g(x, y)) d\tau \right)$$

Dans la configuration symétrique de la FIG. 3.15, on a

$$f(x, y) = -f(x, -y) \quad \text{et} \quad g(x, y) = g(x, -y) < 0$$

Dans ce cas le premier terme disparaît, et il reste

$$\vec{F}_l = -\alpha \vec{v} \quad \text{avec} \quad \alpha = \alpha_0 \langle 1 + g(x, y) \rangle < \alpha_0$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne calculée dans le volume où règne le champ magnétique. Finalement, le coefficient de frottement fluide est inférieur à celui obtenu en négligeant l'accumulation des charges qui assurent la fermeture des lignes de courant. De ce point de vue on peut dire que le champ électrostatique joue un rôle contre-électromoteur.

[5] : DEIBER et al. (2007), « Freinage par courants de foucault (II) : Des charges réparties en volume guident les courants induits »

En pratique le champ magnétique est localisé et non uniforme. Dans ce cas, en plus des charges superficielles, des charges volumiques de guidage apparaissent là où le champ magnétique décroît rapidement. De manière générale, le coefficient de frottement dépend du profil du champ magnétique et de la géométrie du conducteur *via* les effets de bords[5]. On a toujours $\alpha \leq \alpha_0/2$ où α_0 est le coefficient de frottement obtenu en tenant compte uniquement du champ électromoteur.

3.3 Induction de Neumann

On peut aussi induire un courant en soumettant un circuit fixe à un champ magnétique variable dans le temps. Quelle est l'origine du champ électromoteur dans ce cas ?

Équation de Maxwell-Faraday

Les expériences de Faraday ont montré que le courant induit était lié à la variation du flux magnétique à travers l'induit, peu importe l'origine des causes responsables de la variation du flux. Ici le flux magnétique varie car le champ magnétique dépend explicitement du temps. Notons $\vec{B}(M, t)$ le champ magnétique qui règne en un point quelconque M de l'espace, et à l'instant t . Le courant électrique est lié à l'existence d'un champ électrique dont une composante présente un caractère électromoteur. La f.é.m induite doit s'écrire

$$e = \oint_C \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}(M, t) \cdot \vec{n} \, dS \quad (3.5)$$

Notez que P parcourt le circuit dans le sens positif alors que M parcourt une surface S qui s'appuie sur C .

Le théorème de Stokes indique que

$$\oint_C \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{E}(M, t) \cdot \vec{n} \, dS$$

Par conséquent,

$$e = \iint_S \text{rot} \vec{E}(M, t) \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t) \cdot \vec{n} \, dS$$

Équation qui, pour être valable quelle que soit la surface S choisie, implique la relation locale suivante :

Relation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.6)$$

La relation de Maxwell-Faraday est un énoncé complètement équivalent à la relation (3.5). Elle constitue l'une des 4 équations locales de Maxwell. Insistons sur le fait que cette dernière relation s'applique qu'il y ait ou non un circuit conducteur. **Toute variation temporelle d'un champ magnétique induit au même endroit un champ électrique qui a la particularité de ne pas être conservatif.**

Notez qu'en régime stationnaire, on retrouve la relation $\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0}$.

Potentiel électromagnétique

Comme on l'a déjà signalé, la notion de flux magnétique « à travers un circuit » n'a de sens que si le champ magnétique reste à flux conservatif. C'est pourquoi, on étend la conservation du flux magnétique,

aux régimes variables.

$$\operatorname{div} \vec{B}(M, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(M, t) = 0 \quad \heartsuit \quad (3.7)$$

Il en résulte que le champ magnétique dérive d'un **potentiel vecteur** $\vec{A}(M, t)$ fonction de l'espace et du temps :

$$\vec{B}(M, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(M, t) \quad \heartsuit \quad (3.8)$$

Si l'on injecte cette dernière relation dans l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{soit} \quad \operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Autrement dit, le champ $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$ est un gradient. On pose alors

$$\vec{E}(M, t) = -\operatorname{grad} V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \heartsuit \quad (3.9)$$

7 : On dit aussi *potentiel scalaire*.

où $V(M, t)$ désigne le **potentiel électrique**⁷. En régime variable, le champ électrique présente une composante non conservative, appelé champ électromoteur de Neumann : $\vec{E}_{em} = -\partial \vec{A} / \partial t$.

De la même manière que l'ensemble $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ constitue le **champ électromagnétique**, l'ensemble $\{V, \vec{A}\}$ constitue le **potentiel électromagnétique**.

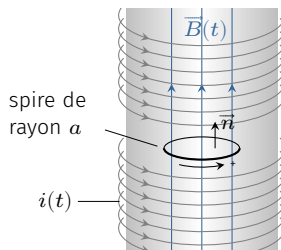


FIG. 3.17 : Spire conductrice en présence d'un champ magnétique axial et variable.

8 : On peut utiliser les lois de la magnétostatique si le courant ne varie pas trop vite; c'est l'approximation des régimes quasi stationnaires (cf. partie 3.4).

Exemple de calcul

Considérons une spire de rayon a d'axe (Oz) . Plaçons cette spire dans un champ magnétique uniforme et axial, mais variable dans le temps

$$\vec{B} = B(t) \vec{u}_z$$

On peut penser au champ magnétique produit par un solénoïde quasi-infini, de densité d'enroulement n , alimenté par un courant d'intensité variable $i(t)$; on a dans ce cas⁸ $B(t) = \mu_0 n i(t)$.

Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan d'antisymétrie; par conséquent le potentiel vecteur est orthoradial. Vu l'invariance par rotation et translation, on peut écrire $\vec{A} = A(r) \vec{u}_\theta$. Une des méthodes permettant de trouver l'expression de $A(r)$ consiste à calculer le flux magnétique à travers une ligne de champ du potentiel vecteur, à savoir un cercle de rayon r . D'une part, on a

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = B(t) \pi r^2$$

D'autre part,

$$\phi_B = \iint \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \oint \vec{A} \cdot \vec{d\ell} = 2\pi r A(r)$$

Il découle $\vec{A} = \frac{1}{2} r B(t) \vec{u}_\theta$. Vérifions que son rotationnel donne bien le

champ magnétique :

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix} = \vec{B}$$

Poursuivons en déterminant le champ électromoteur :

$$\vec{E}_{\text{em}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{2} r \frac{dB(t)}{dt} \vec{u}_\theta$$

Ce champ induit dans la spire un courant d'intensité algébrique

$$i = \frac{1}{R} \oint_{r=a} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\pi a^2}{R} \frac{dB(t)}{dt}$$

où R est la résistance de la spire et où l'auto-induction a été négligée.

Chauffage par induction

Comme nous venons de le voir dans l'exemple précédent, un champ magnétique axial et variable dans le temps induit un courant lui-même variable dans une spire perpendiculaire au champ magnétique. Si l'on remplace la spire par un barreau conducteur, des courants de Foucault vont se développer au sein du matériau, et dissiper l'énergie électrique par effet Joule. C'est le principe du *chauffage par induction* qui a une grande importance, tant industrielle (fusion, soudure sans défaut) que domestique (cuisson sur plaque à induction).

Cherchons à déterminer la distribution de ces courants ainsi que la puissance dissipée par effet Joule en supposant que :

1. le champ magnétique est uniforme et alternatif. On note ω sa pulsation et B_0 son amplitude : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$.
2. Le barreau métallique est un cylindre d'axe (Oz), de rayon a , de hauteur h et de conductivité électrique γ .
3. L'auto-induction est négligée.

D'après l'exemple précédent, le champ électromoteur induit s'écrit

$$\vec{E}(r, t) = -\frac{1}{2} r \frac{dB(t)}{dt} \vec{u}_\theta = \frac{1}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) r \vec{u}_\theta$$

En vertu de la loi d'Ohm, les courants de Foucault se distribuent suivant une densité

$$\vec{j}_e = \gamma \vec{E} = \frac{1}{2} \gamma B_0 \omega \sin(\omega t) r \vec{u}_\theta$$

On constate que les courants de Foucault ne sont pas répartis uniformément dans le cylindre. Par ailleurs, plus la fréquence est élevée, plus ces courants sont intenses.

Calculons maintenant la puissance dissipée par effet Joule. Notons ρ_e la densité des électrons libres. Chaque élément de volume $d\tau$

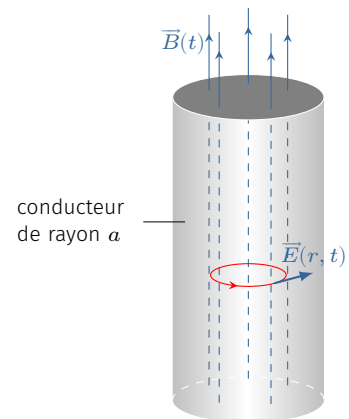


FIG. 3.18 : Barreau cylindrique conducteur, siège de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.

contient $\rho_e d\tau$ porteurs de charge et subit la force électrique $d\vec{F} = \rho_e d\tau \vec{E}$. Celle-ci développe une puissance

$$d\mathcal{P} = \rho_e d\tau \vec{E} \cdot \vec{v}_e = \vec{j}_e \cdot \vec{E} d\tau$$

où l'on a fait intervenir \vec{v}_e la vitesse moyenne des électrons libres. Finalement, la puissance fournie au cylindre conducteur s'écrit

$$\mathcal{P} = \iiint \vec{j}_e \cdot \vec{E} d\tau = \iiint \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)}{4} r^2 d\tau$$

Après intégration sur le volume cylindrique, on trouve

$$\mathcal{P} = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)}{4} \underbrace{\iiint r^3 dr d\theta dz}_{\pi a^4 h/2} = \frac{\pi \gamma \omega^2 B_0^2 a^4 h}{8} \sin^2(\omega t)$$

En moyenne, la puissance dissipée par unité de volume ($\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$) vaut

$$\frac{\bar{\mathcal{P}}}{\mathcal{V}} = \frac{\gamma \omega^2 B_0^2 a^2}{16}$$

La densité de puissance moyenne croît linéairement avec la surface du cylindre, le carré du champ magnétique et la fréquence. Ce dernier point est cependant à nuancer car nous avons négligé l'auto-induction, ce qui restreint le domaine de validité de la relation obtenue. Nos résultats supposent en effet que le champ imposé est bien supérieur au champ magnétique induit. On peut estimer ce dernier à partir de l'expression de \vec{j}_e : on trouve⁹ $B_{\text{induit}} \sim \mu_0 \gamma a^2 \omega B_0 / 4$. Nos résultats sont donc valides tant que

$$\frac{\mu_0 \gamma a^2 \omega B_0}{4} \ll B_0 \quad \text{soit} \quad \omega \ll \frac{4}{\mu_0 \gamma a^2}$$

Par exemple, pour un cylindre d'aluminium de rayon $a = 1 \text{ cm}$ et de conductivité $\gamma = 38 \cdot 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$, cela donne une fréquence $\nu \ll 800 \text{ Hz}$. Au delà, la puissance dissipée croît plutôt en $\sqrt{\omega}$. Pour un traitement complet du problème, voir [6].

9 : Le théorème d'ampère donne $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_{\text{induit}} = \mu_0 \vec{j}_e$. Si l'on néglige les effets de bords, \vec{B}_{induit} est axial et ne dépend que de r . On a alors $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_{\text{induit}} = -dB_{\text{induit}}/dr \vec{u}_\theta$. En remplaçant \vec{j}_e par son expression, on aboutit à

$$B_{\text{induit}} = \frac{\mu_0 \gamma \omega B_0}{4} (a^2 - r^2) \sin(\omega t)$$

Le champ induit est maximum au centre.

[6] : ROUSSEL et al. (2011), « Courants de Foucault induits dans un cylindre conducteur - Approche numérique »

3.4 Bilan et discussions

Équations de Maxwell dans l'ARQS

Résumons ce que l'on a appris dans ce chapitre : les phénomènes d'induction font apparaître un lien entre phénomène électrique et variation de flux, ce qui oblige à admettre l'existence d'un couplage entre champ électrique et magnétique. Les équations locales qui décrivent bien les phénomènes d'induction se résument à :

Relation avec les sources	Structure du champ	♡ (3.10)
$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}_e \end{aligned}$	$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$	

où la relation en gras traduit le couplage électromagnétique. Ces équations forment les équations de Maxwell dans un cadre approché que l'on appelle *Approximation des Régimes Quasi Stationnaires*¹⁰. Nous verrons au **Chapitre 4** que cette approximation revient à négliger les retards de propagation de l'interaction électromagnétique. Pour un circuit de dimension caractéristique L , soumis a des grandeurs électromagnétiques variables de temps caractéristique T , le retard de propagation est effectivement négligeable si

$$cT \ll L \quad \text{soit en terme de fréquence} \quad \nu \ll \frac{c}{L}$$

Pour $L \sim 1$ m, cela donne $\nu \ll 300$ MHz. Cette gamme de fréquence définit le *domaine de l'électrocinétique*. Dans ce cadre, le courant électrique est à flux conservatif. En effet, puisque la divergence d'un rotationnel est nul, on a

$$\text{div}(\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \text{div} \vec{j}_e(M, t) = 0$$

Par conséquent, à un instant t , le long d'une branche d'un circuit, l'intensité électrique conserve la même valeur. Par ailleurs, si on calcule le flux de \vec{j}_e à travers une surface fermée qui englobe un nœud, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n \text{ branches}} i_k(t) = 0$$

où i_k est l'intensité algébrique du courant de la k^{e} branche; on retrouve la *loi des nœuds*.

Enfin, la loi d'Ohm des conducteurs est aussi valide en régime quasi-stationnaire :

$$\vec{j}_e(M, t) = \gamma \vec{E}'(M, t)$$

où \vec{E}' est le champ électrique dans le référentiel du conducteur.

Discussion autour de la loi de Faraday

Jusqu'ici, nous avons distingué le cas où le circuit est en mouvement dans un champ magnétique stationnaire du cas où le circuit est fixe dans un champ électromagnétique dépendant du temps. Mais que se passe-t-il lorsque un circuit est mobile dans un champ électromagnétique variable? La loi de Faraday est-elle toujours valide?

Dans le cas général, la f.é.m d'induction s'obtient toujours par le calcul de la circulation le long du circuit C du champ électrique¹¹ :

$$e(t) = \oint_{P \in C} \vec{E}'(P, t) \cdot d\vec{\ell}$$

où \vec{E}' est le champ électrique dans le référentiel lié à la portion P du circuit C . Dans le cadre de l'électromagnétisme classique¹², \vec{E}' est lié au champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ du laboratoire via

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_p \wedge \vec{B} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

10 : ARQS en abrégé.

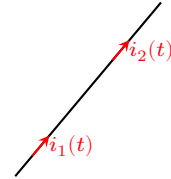


FIG. 3.19 : Dans l'ARQS, $i_1(t) = i_2(t)$.

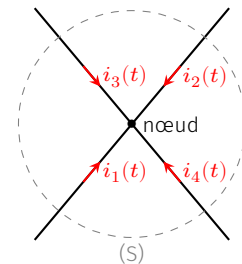


FIG. 3.20 : Dans l'ARQS, $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0$.

11 : En réalité, seule sa composante électromotrice intervient puisque sa composante électrostatique $-\text{grad}V$ est à circulation nulle sur un circuit fermé.

12 : On suppose que la vitesse de déplacement du circuit par rapport au référentiel galiléen du laboratoire est non relativiste.

ce qui donne la formule générale

$$e(t) = \underbrace{\oint -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\mathbf{P}, t) \cdot d\vec{\ell}}_{\text{Neumann}} + \underbrace{\oint \vec{v}_p \wedge \vec{B}(\mathbf{P}, t) \cdot d\vec{\ell}}_{\text{Lorentz}} \quad \heartsuit \quad (3.11)$$

Le premier terme traduit la variation du flux suite à la variation du champ magnétique quand le second terme correspond à la variation du flux suite au déplacement du circuit. Finalement, on peut écrire

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

13 : Certains auteurs comme Richard Feynman préfèrent parler de *règle du flux* pour cette raison.

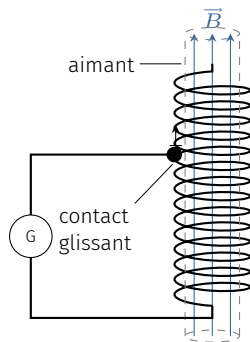


FIG. 3.21 : Un exemple de circuit soumis à une variation de flux et pourtant siège d'aucun phénomène d'induction.

à condition de tenir compte de toutes les causes de variation du flux. Toutefois, la « loi de Lenz-Faraday » souffre de quelques exceptions¹³. Dans le circuit de la FIG. 3.21, un contact glisse sur un bobinage que l'on a enroulé autour d'un aimant. Lorsque le curseur se déplace, le nombre de spires du circuit fermé varie de sorte que le flux magnétique à travers le circuit varie. Pourtant, aucun phénomène d'induction n'est observé. En effet, si l'on utilise la relation (3.11) on trouve $e = 0$, car :

- d'une part, le potentiel vecteur est indépendant du temps;
- d'autre part, le champ électromoteur de Lorentz est quasi nul. En effet $B \simeq 0$ à l'extérieur de l'aimant. Même si on tient compte du champ résiduel extérieur, ce dernier étant dans le plan du circuit, \vec{E}_{em} est nécessairement perpendiculaire à la partie mobile, de sorte que sa circulation ne peut que donner zéro.

La formule de Lenz-Faraday est donc à manier avec précaution. Cette formule suppose en fait une variation *continue* des paramètres qui définissent la configuration du circuit. L'exemple ci-dessus ne respecte pas cette condition, car la surface enfermée par le circuit varie de façon discontinue à chaque fois que le curseur entre en contact avec une spire au cours de son déplacement.

En 1865, le physicien écossais James Clerk Maxwell publie *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, article dans lequel il unifie les théories électrique et magnétique en une seule, et établit 20 équations différentielles qui décrivent le comportement local du champ électromagnétique. C'est Oliver Heaviside qui les réduira à 4; les 4 *équations de Maxwell* qui, associées à la force de Lorentz, forment la *théorie électromagnétique classique*.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/equations-de-maxwell.php>

- 4.1 Lois générales 55
 - Champ électromagnétique 55
 - Équation de continuité . . 56
 - Il manque quelque chose 56
 - Courant de déplacement 57
 - Bilan 58
- 4.2 Leur résolution 59
 - Propriétés 59
 - Introduction des potentiels 59
 - Jauge de Lorenz 60
 - ARQS 62

4.1 Lois générales de l'électromagnétisme

Concept de champ électromagnétique

Nous avons vu lors de l'étude des phénomènes électriques et magnétiques en régime stationnaire, qu'on pouvait les interpréter en faisant intervenir deux champs indépendants : les charges électriques produisent dans tout l'espace un champ électrique $\vec{E}(M)$ donné par la loi de Coulomb, et les courants électriques un champ magnétique $\vec{B}(M)$ obtenu par la loi de Biot et Savart.

Les phénomènes d'induction sont venus troubler ce découplage apparent entre magnétisme et électricité. Lorsque les charges et/ou les courants évoluent au cours du temps cela produit à la fois un champ électrique et magnétique sans qu'il soit possible de relier le champ électrique uniquement à la charge électrique, ni le champ magnétique uniquement au courant électrique. Ainsi, on admet que l'objet physique pertinent pour décrire ces phénomènes, est le **champ électromagnétique** $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ qui forme un tout indissociable. Il s'agit donc d'un objet mathématique constitué de 6 champs scalaires¹. Le champ électromagnétique est accessible à l'expérience par l'intermédiaire de la **formule de Lorentz** qui donne la force subie par une particule de charge q et de vitesse \vec{v} dans un référentiel donné :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \heartsuit \quad (4.1)$$

L'objet de ce chapitre est de déterminer les lois qui relient une distribution de charges et courants modélisée par les densités (ρ_e, \vec{j}_e) , au champ électromagnétique $\{\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)\}$.



FIG. 4.1 : James Clerk Maxwell (1831-1879) - © George J. Stodart, Public domain, via Wikimedia Commons

1: On choisit de représenter ce champ par un ensemble de deux vecteurs de \mathbb{R}^3 mais on pourrait tout aussi bien décrire ce champ par un tenseur symétrique 4×4 .

Équation de continuité

Toute distribution de charges doit obéir à un principe qui dépasse le cadre de l'électromagnétisme : la *loi de conservation de la charge*. Celle-ci se traduit par une équation locale qui relie densité volumique de charge et densité volumique de courant.

Imaginons un volume V fixe dans le référentiel d'étude, contenant une charge totale $q(t)$. Ce volume est délimité par une surface fermée S . Si l'on caractérise la distribution des charges par sa densité volumique $\rho_e(M, t)$ et son courant $\vec{j}_e(M, t)$, on a

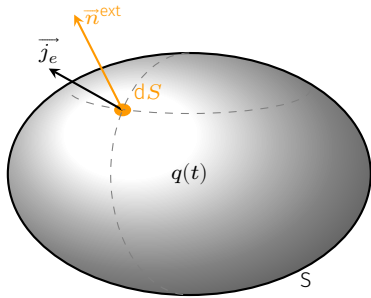


FIG. 4.2 : Volume V chargé, délimité par une surface fermée S .

Notez que l'on doit prendre la dérivée partielle par rapport au temps car ρ_e est une fonction du temps et de la position.

$$q(t) = \iiint_V \rho_e(M, t) d\tau \quad \text{et} \quad i_{\text{sortant}} = \oiint_S \vec{j}_e(M, t) \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS$$

où i_{sortant} est l'intensité du courant électrique sortant du volume à l'instant t .

Le principe de conservation de la charge se traduit par le fait que si $q(t)$ varie au cours du temps, c'est que le volume V a échangé des charges avec l'extérieur sous forme de courants :

$$i_{\text{sortant}} = -\frac{dq(t)}{dt} \quad \text{soit} \quad \oiint_S \vec{j}_e(M, t) \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = -\iiint_V \frac{\partial \rho_e(M, t)}{\partial t} d\tau$$

Le premier terme peut être transformé à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_V \text{div} \vec{j}_e(M, t) d\tau = -\iiint_V \frac{\partial \rho_e(M, t)}{\partial t} d\tau$$

L'égalité devant être vérifiée quel que soit le volume V choisi, il en découle la relation

$$\text{div} \vec{j}_e(M, t) + \frac{\partial \rho_e(M, t)}{\partial t} = 0 \quad \heartsuit \quad (4.2)$$

Cette équation est appelée **équation de continuité** ou **équation de conservation de la charge**.

En régime stationnaire, densité et courant sont indépendants du temps : on retrouve alors la relation déjà rencontrée $\text{div} \vec{j}_e(M) = 0$ qui exprime le fait que le courant électrique est à flux conservatif.

Il manque quelque chose

2 : On parle ici de l'électrostatique, la magnétostatique et l'induction électromagnétique.

Les phénomènes électromagnétiques étudiés jusqu'ici² sont bien décrits par les équations résumées ici :

Relation avec les sources $\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \\ \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}_e \end{aligned}$	Structure du champ $\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$
---	---

Montrons sur un exemple classique d'électrocinétique que nos équations ne forment pas un cadre cohérent.

Imaginons la situation d'un condensateur initialement chargé se déchargeant dans une résistance. Lors de la décharge, un courant électrique circule dans le circuit produisant ainsi un champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ autour des fils de connexion. Considérons un cercle C entourant le circuit comme indiqué sur la FIG. 4.3, puis calculons la circulation du champ magnétique le long de C à l'aide du théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \mu_0 \vec{j}_e \cdot d\vec{S} = \mu_0 i(t) \quad (4.3)$$

où le flux de \vec{j}_e a été calculé à travers le disque entouré par C . On retrouve bien entendu le théorème d'Ampère.

Cependant, rien nous oblige à choisir le disque comme surface d'intégration. Toute surface convient tant qu'elle s'appuie sur le contour C . Prenons donc la surface S' qui passe entre les armatures du condensateur. Dans ce cas, aucun courant ne traverse S' et l'on a

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S'} \mu_0 \vec{j}_e \cdot d\vec{S} = 0$$

en contradiction avec la relation précédente.

C'est en résolvant cette contradiction que Maxwell trouva un cadre cohérent pour unifier les effets électromagnétiques.

Courant de déplacement

Dans le calcul précédent on se rend bien compte que le long de la surface S' le vecteur $\text{rot} \vec{B}$ doit présenter par endroit une valeur non nulle. Il faut donc modifier la relation d'Ampère. Pour cela, écrivons

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_e + \vec{j}_d)$$

où \vec{j}_d est un terme supplémentaire homogène à une densité volumique de courant. Ce terme est appelé **courant de déplacement**. Cherchons l'expression qu'il faut lui donner. Pour cela, exprimons $\text{div} \vec{j}_e$:

$$\vec{j}_e = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} - \vec{j}_d \quad \text{d'où} \quad \text{div} \vec{j}_e = \text{div} \left[\text{rot} (\vec{B}/\mu_0) - \vec{j}_d \right] = -\text{div} \vec{j}_d$$

Or, la conservation de la charge impose $\text{div} \vec{j}_e = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}$ ce qui implique

$$\text{div} \vec{j}_d = \frac{\partial \rho_e}{\partial t}$$

Si l'on considère que la relation de Maxwell-Gauss reste valide en régime variable, alors $\rho_e = \epsilon_0 \text{div} \vec{E}$, et on aboutit à la relation

$$\text{div} \vec{j}_d = \text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

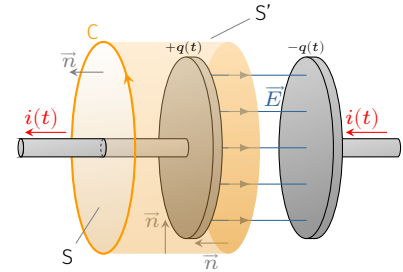


FIG. 4.3 : Condensateur se déchargeant. Ici q décroît au cours du temps.

On peut intervertir les dérivées temporelles et spatiales en vertu du théorème de Schwarz.

Dans ses publications de 1865 Maxwell propose d'adopter la solution particulière la plus simple, à savoir

$$\vec{j}_d \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad [\text{A.m}^{-2}] \quad \heartsuit \quad (4.4)$$

Ce choix s'est avéré justifié par les conséquences vérifiables expérimentalement.

Exemple

Reprenons l'exemple de la Fig. 4.3. Si l'on adopte l'approximation du condensateur plan, on a, en notant σ_e la densité surfacique de charge :

$$\vec{E} = \begin{cases} -\sigma_e/\epsilon_0 \vec{n} & \text{à l'intérieur} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

Par conséquent, lorsque le condensateur se décharge, il apparaît entre les armatures un courant de déplacement donné par

$$\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{\partial \sigma_e}{\partial t} \vec{n} & \text{à l'intérieur} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

Reprenons le calcul de la circulation du champ magnétique en faisant intervenir le flux de $\vec{\text{rot}} \vec{B}$ à travers la surface S' :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S'} \mu_0 \vec{j}_d \cdot \vec{n} dS = -\mu_0 \frac{d(\sigma_e S_0)}{dt}$$

où S_0 est la surface d'une armature. Sachant que $\sigma_e S_0 = q(t)$, on retrouve le résultat (4.3).

$q(t)$ décroissant, on a $i = -\frac{dq}{dt}$.

Bilan

En résumé, les phénomènes électromagnétiques sont correctement décrits si l'on admet l'existence d'un champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ accessible expérimentalement *via* la force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

et dont les propriétés locales sont données par les 4 équations de Maxwell :

Équations de Maxwell

Relation avec les sources

Maxwell-Gauss $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$

Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Structure du champ

$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Maxwell-Faraday

$\text{div} \vec{B} = 0$ Maxwell-Thomson

On distingue deux relations qui relient les champs aux sources (courant et densité de charge). La première traduit le théorème de Gauss qui découle comme on l'a vu de la loi de Coulomb et que l'on étend

aux régimes variables. La seconde traduit le théorème d'Ampère modifié par la prise en compte du courant de déplacement pour assurer la conservation de la charge. Les deux autres relations traduisent les propriétés intrinsèques du champ électromagnétique indépendamment des sources. La relation de Maxwell-Faraday indique que toute variation temporelle du champ magnétique induit un champ électrique (phénomène d'induction), et la dernière postule que le champ magnétique est à flux conservatif.

Notez que le principe de conservation de la charge est implicitement inclus dans les équations de Maxwell.

Enfin, ces équations de Maxwell sont valables dans *tout* référentiel galiléen³.

3 : Comme on le sait, le référentiel terrestre n'est pas strictement galiléen du fait de sa rotation propre. Toutefois, l'influence de cette dernière sur les phénomènes électromagnétiques est tout à fait négligeable.

4.2 Résolution des équations de Maxwell

Propriétés

Les équations de Maxwell constituent un système couplé aux dérivées partielles du premier ordre, dont la solution est le champ électromagnétique. Donnons quelques propriétés de ce champ.

Continuité du champ – Si les sources sont décrites par une description volumique⁴, le champ électromagnétique est continu.

Discontinuité du champ – Il arrive que l'on soit amené à idéaliser une situation physique en décrivant un ensemble de charges ou de courants comme s'ils étaient distribués le long d'une surface. Ce type de simplifications conduit à des discontinuités du champ de part et d'autre de la surface. On retrouve les mêmes propriétés que celles déjà vues au [Chapitre 2](#) et [Chapitre 1](#) dans le cadre des régimes stationnaires. Nous les résumons ici :

4 : On caractérise la source par une densité volumique de charge locale $\rho_e(M, t)$ et un courant volumique local $\vec{j}_e(M, t)$.

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}) \quad \heartsuit \quad (4.5)$$

Principe de superposition – Les équations de Maxwell ont le bon goût d'être linéaires par rapport aux champs et aux sources. Il en découle le principe de superposition suivant : Si une distribution \mathcal{D}_1 crée en M et à l'instant t un champ électromagnétique $\{\vec{E}_1, \vec{B}_1\}$, et qu'une autre distribution crée le champ $\{\vec{E}_2, \vec{B}_2\}$, alors les deux distributions agissant simultanément créeront le champ électromagnétique $\{\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{B}_1 + \vec{B}_2\}$.

Introduction des potentiels

Les équations de Maxwell forment un système d'équations aux dérivées partielles qui ne permet pas, en général, d'explicitier séparément les champs \vec{E} et \vec{B} en fonction des densités ρ_e et \vec{j}_e . En revanche, l'introduction des potentiels dont dérivent les champs \vec{E} et \vec{B} va nous permettre de découpler le problème. On est ainsi capable d'exprimer le potentiel V en fonction de ρ_e et le potentiel vecteur \vec{A} en fonction

de \vec{j}_e . Le champ électromagnétique s'en déduit par simple dérivation. Cherchons donc à déterminer les équations vérifiées par les potentiels.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la conservation du flux magnétique $\text{div} \vec{B} = 0$ implique que \vec{B} est un champ rotationnel :

$$\vec{B}(M, t) \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M, t) \quad \heartsuit \quad (4.6)$$

En réinjectant dans l'équation de Maxwell-Faraday, on trouve

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Ce qui signifie que le champ à l'intérieur de l'opérateur rotationnel est un gradient. On pose alors

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{soit} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t} \quad \heartsuit \quad (4.7)$$

Le potentiel électromagnétique $\{V, \vec{A}\}$ est donc un intermédiaire de calcul qui permet de déduire le champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$.

Utilisons maintenant les deux autres équations de Maxwell en utilisant les potentiels :

$$\begin{aligned} \text{div} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad \text{Maxwell-Gauss} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \mu_0 \vec{j}_e - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{grad}} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad \text{Maxwell-Ampère} \end{aligned}$$

En utilisant les identités $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \Delta f$ et $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$, on aboutit à

$$\Delta V + \frac{\partial \text{div} \vec{A}}{\partial t} + \frac{\rho_e}{\epsilon_0} = 0 \quad (4.8)$$

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \mu_0 \vec{j}_e = \vec{0} \quad (4.9)$$

Finalement on aboutit à 4 équations aux dérivées partielles couplées et du second ordre. Voyons maintenant comment découpler ces équations.

Jauge de Lorenz

Rappelons que les définitions (4.6) et (4.7) ne définissent pas de manière univoque les potentiels. En effet, les transformations

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f \quad \text{et} \quad V \rightarrow V - \frac{\partial f}{\partial t}$$

laissent invariantes les relations

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On peut profiter de cette indétermination pour imposer une condition supplémentaire qui serait choisie en fonction des simplifications qu'elle apporte. Cette contrainte arbitraire est dite *condition de jauge*.

La **jauge de Lorenz** est une jauge particulière donnée par :

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \quad \heartsuit \quad (4.10)$$

Exercice – Montrer que c est homogène à une vitesse (nous verrons qu'il s'agit de la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide).

Cette contrainte permet de simplifier grandement les équations (4.8) et (4.9) qui deviennent alors :

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho_e}{\epsilon_0} = 0 \quad (4.11)$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j}_e = \vec{0} \quad (4.12)$$

Ainsi, on obtient deux équations *découplés*, qui relient le potentiel scalaire à la densité de charge, et le potentiel vecteur au courant. Les solutions ont été introduites par Lorenz et sont appelées potentiels retardés.

Potentiels retardés (jauge de Lorenz)

$$\begin{aligned}
 V(M, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho_e(P, t - r/c)}{r} d\tau \\
 \vec{A}(M, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\vec{j}_e(P, t - r/c)}{r} d\tau \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}
 \end{aligned}
 \quad (4.13)$$

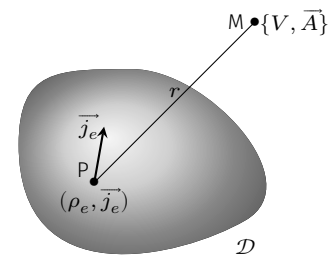


FIG. 4.4 : Notations associées.

Tout se passe comme si chaque point P de la distribution produisait en M un potentiel électromagnétique correspondant à celui vu en régime stationnaire à ceci près qu'il faut considérer l'état de P à l'instant $t - PM/c$ pour connaître l'effet en M à l'instant t . Ce retard⁵ est dû au terme en

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

qui traduit un *phénomène de propagation* à la vitesse c .

Insistons sur le fait que ce découplage n'est possible qu'avec les potentiels et dans le cadre de la jauge de Lorenz. Le découplage des champs \vec{E} et \vec{B} n'est possible qu'en régime statique. Une fois ces potentiels calculés, on en déduit le champ électromagnétique par les relations (4.6) et (4.7).

5 : D'où le terme de potentiels retardés.

Approximation des régimes quasi-stationnaires

Comme nous venons de le voir, le potentiel électromagnétique $\{V, \vec{A}\}$ dépend de l'état des sources à l'instant $t - PM/c$ avec $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$. Nous verrons que c correspond à la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques et qu'elle vaut environ $3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

ARQS

L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) consiste à négliger le terme de propagation, autrement dit à considérer la vitesse de propagation infinie.

Dans ce contexte, les potentiels prennent la forme suivante :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho_e(P, t)}{r} d\tau \quad \text{et} \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\vec{j}_e(P, t)}{r} d\tau \quad (4.14)$$

On en tire plusieurs conséquences.

- L'expression du potentiel vecteur est la même que celle vue en magnétostatique, à une nuance près : la densité de courant dépend a priori du temps. Ainsi, la loi de Biot et Savart reste valide⁶ dans l'ARQS.
- Pour les mêmes raisons, le théorème d'Ampère vu en magnéto-statique est encore valide :

$$\text{rot } \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}_e(M, t)$$

Par conséquent, l'ARQS revient à négliger le courant de déplacement $\vec{j}_d = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$.

- Prenons la divergence de l'équation de Maxwell précédente. On aboutit à $\text{div } \vec{j}_e = 0$: dans l'ARQS, le flux du courant électrique se conserve. C'est cette propriété qui est à la base de l'électrocinétique⁷
- Bien que le potentiel scalaire présente la même expression qu'en régime stationnaire, le champ électrique viole la loi de Coulomb puisque

$$\vec{E}(M, t) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t}$$

Autrement dit, l'ARQS néglige les phénomènes de propagation mais pas les phénomènes d'induction.

L'ARQS suppose que la source évolue au cours du temps avec un temps caractéristique T suffisamment grand devant le retard τ dû à la propagation. En régime sinusoïdal cela signifie que

$$\frac{PM}{c} \ll T \quad \text{soit} \quad PM \ll cT = c/\nu = \lambda$$

En particulier, sur une distance de 1 m, l'ARQS est valable pour des fréquences $\nu \ll 300 \text{ MHz}$: c'est le domaine de l'électrocinétique. Dans le cas des courants industriels la fréquence est fixée à 50 Hz, ce qui impose $PM \ll 6\,000 \text{ km}$: à l'échelle d'un pays, le transport de l'électricité peut être traité dans le cadre de l'ARQS.

6 : Dans l'ARQS \vec{B} prend la forme

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\vec{j}_e(P, t) \wedge \vec{u}}{r^2} d\tau$$

7 : On en tire la loi des nœuds. En particulier, en tout point d'une branche d'un circuit l'intensité électrique prend la même valeur à un instant t .

LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

5

Les équations de Maxwell relient les sources électriques (charges et courants) au champ électromagnétique. Dans ce cours nous nous intéressons à la dynamique du champ électromagnétique dans le vide sans se préoccuper des sources qui en sont à l'origine.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/ondes-em.php>

5.1 Propagation du champ dans le vide

Équation de propagation

Plaçons-nous dans une région de l'espace où règne le vide : aucune matière n'y est présente ; en particulier les densités de charge et courant électrique sont rigoureusement nuls. Dans cette région, les équations de Maxwell prennent la forme simple suivante :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

Pour obtenir l'équation qui régit la dynamique du champ électrique ou magnétique on utilise l'identité :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \quad \text{soit} \quad \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Commençons par l'appliquer au champ électrique :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

Par ailleurs, on a également

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On aboutit à l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

En procédant de la même manière avec le champ magnétique, c'est-à-dire en calculant $\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B})$, on laisse au lecteur le soin de vérifier que le champ magnétique est régi par la même équation.

5.1 Propagation dans le vide	63
Équation de propagation	63
Propagation isotrope . . .	64
Vitesse de propagation . .	66
5.2 Propagation unidimensionnelle	67
Onde plane	67
OPPH	68
Vecteur d'onde	70
Notation complexe	70
5.3 Polarisation	71
Généralités	71
Polarisation rectiligne . .	71
Polarisation elliptique . .	72
Polarisation circulaire . .	72
Polarisation aléatoire . . .	74
Production de lumière polarisée	74



Fig. 5.1 : Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) est un mathématicien, physicien et philosophe français du siècle des Lumières. Il établit l'équation des ondes en 1746 dans un traité sur la physique des cordes vibrantes.

Équation de propagation du champ électromagnétique

Le champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ vérifie l'équation

$$\Delta\{\vec{E}, \vec{B}\} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\{\vec{E}, \vec{B}\}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

Cette équation aux dérivées partielles d'ordre deux, est dite *équation de d'Alembert* ou *équation des ondes*, car nous verrons que ses solutions caractérisent un phénomène propagatif. Une analyse aux dimensions nous révèle que le terme c représente une vitesse caractéristique :

$$\frac{[E]}{L^2} = \frac{1}{[c^2]} \frac{[E]}{T^2} \quad \text{soit} \quad [c] = \frac{L}{T}$$

Il s'agira de la vitesse de propagation. Par ailleurs, cette équation reste invariante par inversion du sens du temps. En effet, changer t en $-t$ ne change rien à l'opérateur $\partial^2/\partial t^2$, ni au laplacien. Le phénomène décrit est réversible, par conséquent non dissipatif.

Bien entendu, la solution particulière évidente \vec{E} ou $\vec{B} = \vec{c}^{\text{te}}$ ne nous intéresse pas. Nous cherchons des solutions variables dans l'espace et le temps.

Concernant le potentiel électromagnétique $\{V, \vec{A}\}$, on peut vérifier à l'aide des équations (4.11) du chapitre précédent, qu'il est également régi par l'équation d'onde à condition de se placer dans la jauge de Lorentz.

Propagation isotrope

Cherchons la forme des solutions dans le cas où le champ électromagnétique présente la propriété d'isotropie autour d'un point O que nous prenons comme origine du repère. Adoptons les coordonnées sphériques, et posons :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(r, t) \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \vec{B}(r, t)$$

On montre dans ce cas que la composante radiale du champ électromagnétique est nécessairement nulle. Considérons donc la composante orthoradiale $E_\theta(r, t)$. L'équation de d'Alembert devient[7] :

$$\Delta E_\theta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r E_\theta)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1)$$

Les solutions de cette équation aux dérivées partielles se mettent sous la forme

$$E_\theta = \frac{1}{r} [f(r - ct) + g(r + ct)]$$

[7] : ROUSSEL (2013), *Les opérateurs différentiels*

Démonstration

Posons $\psi = rE_\theta$. L'équation (5.1) se ramène à

$$\frac{\partial^2(\psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

Effectuons le changement de variables $u = r - ct$ et $v = r + ct$. On a

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \left[\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \right] = c^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right]$$

Finalement l'équation des ondes prend la forme simple suivante

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0$$

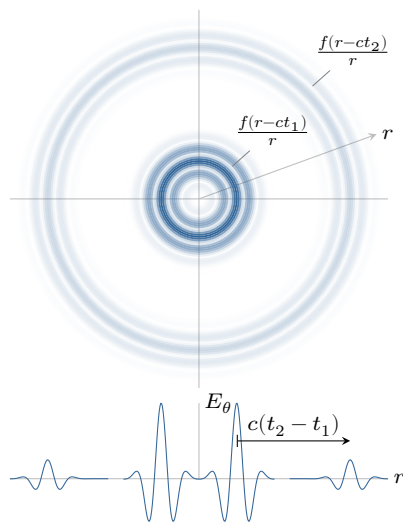
Intégrons par rapport à u puis par rapport à v :

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = F(v) \rightarrow \psi(u, v) = \int F(v) dv + f(u) = g(v) + f(u)$$

Revenons avec les variables (r, t) :

$$rE_\theta = f(r - ct) + g(r + ct) \quad \text{CQFD}$$

Interprétons le terme $f(r - ct)$. À $t = 0$ ce signal vaut $f(r)$, et à l'instant $t > 0$ le signal $f(r - ct)$ est le même signal translaté radialement de la distance ct . Autrement dit, $f(r - ct)$ est un signal qui se propage radialement à la vitesse c . Ainsi le terme $f(r - ct)/r$ représente un signal qui se propage radialement tout en s'amortissant¹ au fur et à mesure de sa propagation.



1 : Cet amortissement n'est en aucun cas lié à un phénomène dissipatif. Au contraire, comme nous le verrons ultérieurement, il est la conséquence de la conservation de l'énergie.

FIG. 5.2 : Simulation d'un signal de la forme $f(r - ct)/r$.

On appelle onde sphérique divergente ce type d'onde. En effet, sa surface d'onde² a pour équation $r - ct = C^{te}$ ce qui correspond à une sphère se dilatant à la vitesse c . Ce type d'émission électromagnétique décrit assez bien le comportement des étoiles par exemple.

2 : Rappelons que la surface d'onde correspond à l'ensemble des points qui, à un instant t , présente la même valeur du champ.

De la même manière, le terme $g(r + ct)/r$ représente une onde sphérique se contractant à la vitesse c .

Finalement, la propagation isotrope d'une onde électromagnétique à la vitesse c est une solution de l'équation de d'Alembert. Lorsque l'on se trouve assez loin de la source d'émission, ces ondes sphériques « s'aplatissent » et présentent une structure d'ondes planes que nous étudions plus en détail dans la section suivante.

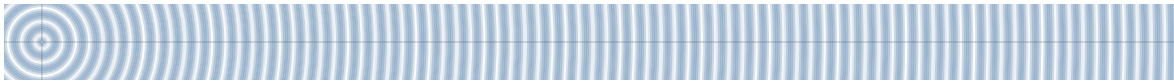


FIG. 5.3 : « Aplatissement » des ondes sphériques.

Vitesse de propagation

L'équation de propagation prévoit donc l'existence d'ondes électromagnétiques se propageant dans le vide à la vitesse

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \heartsuit \quad (5.2)$$



FIG. 5.4 : Heinrich Rudolph Hertz (1857-1894) est un physicien allemand qui découvrit l'effet photoélectrique et confirma l'existence des ondes électromagnétiques.

À l'époque de Maxwell, les constantes μ_0 et ϵ_0 étaient connues grâce aux travaux expérimentaux de Kohlrausch et Weber. Le calcul donna $c \simeq 3,11 \times 10^8 \text{ m/s}^{-1}$, valeur étrangement proche de la vitesse de la lumière déterminée par Fizeau en 1849. En effet, à l'aide d'une roue dentée en rotation rapide, Hippolyte Fizeau mesure une vitesse de la lumière d'environ $3,15 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Il n'en faut pas plus pour pousser Maxwell à conjecturer la nature électromagnétique de la lumière. Il écrira :

« The agreement of the results seems to show that light and magnetism are affections of the same substance, and that light is an electromagnetic disturbance propagated through the field according to electromagnetic laws » – J.C Maxwell

3 : Par exemple, Faraday avait mis en évidence l'effet qui porte maintenant son nom : un champ magnétique axial peut faire tourner le plan de polarisation de la lumière. L'angle de rotation dépend de l'intensité du champ magnétique et du milieu dans lequel la lumière se propage.

L'idée que la lumière pouvait être de nature électromagnétique était dans l'air du temps et de nombreux indices existaient déjà du temps de Maxwell³. Toutefois, c'est en 1888, neuf ans après la mort de Maxwell, que le physicien allemand Heinrich Rudolf Hertz confirme l'existence de telles ondes. Ces ondes, dit hertziennes, seront à l'origine du développement de la communication à distance et de la radio.

Depuis 1983, la vitesse de la lumière dans le vide est devenue une constante fondamentale définie par le Système international des unités. Sa valeur est fixée à

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

5.2 Propagation unidimensionnelle

Onde plane

L'onde plane est une solution unidimensionnelle de l'équation d'onde. Autrement dit, le champ électromagnétique ne dépend que d'une dimension d'espace - prenons x par exemple - en plus de la dimension temporelle : $\{\vec{E}(x, t), \vec{B}(x, t)\}$.

L'équation d'onde devient

$$\frac{\partial^2 \{\vec{E}, \vec{B}\}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \{\vec{E}, \vec{B}\}}{\partial t^2} = 0$$

et la solution se met sous la forme

$$\vec{E} = \vec{E}_1(x - ct) + \vec{E}_2(x + ct) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_1(x - ct) + \vec{B}_2(x + ct)$$

Les termes $\vec{E}_1(x - ct)$ et $\vec{B}_1(x - ct)$ représentent des ondes planes se propageant dans le sens des x croissants. En effet, la surface d'onde a pour équation

$$x - ct = C^{\text{te}}$$

ce qui représente un plan parallèle à (yOz) se déplaçant à la vitesse $\dot{x} = c$ suivant \vec{u}_x . Il s'agit d'une *onde plane progressive*. Les termes $\vec{E}_2(x + ct)$ et $\vec{B}_2(x + ct)$ désignent quant à eux le même type d'onde se propageant à la vitesse c dans la direction opposée : il s'agit d'une *onde plane régressive*.

Suite aux expériences menées par Fresnel et Arago au début du XIX^e siècle, Fresnel avait conjecturé la nature transversale de l'onde lumineuse. C'est effectivement une des caractéristiques des ondes planes électromagnétiques qui découle des équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \partial E_x / \partial x = 0 \\ \partial B_x / \partial x = 0 \end{cases}$$

Les relations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday impliquent

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{cases}$$

Finalement, on aboutit à la conclusion que le champ électromagnétique suivant x ne dépend ni de x ni de t . Par conséquent, il ne peut être que constant. Puisque nous cherchons des solutions variables, nous pouvons ignorer cette solution et poser $E_x = B_x = 0$. Le champ électromagnétique est orthogonal à la direction de propagation ; l'onde électromagnétique est *transversale*.

Allons plus loin en déterminant la structure du champ électromagnétique transportée par l'onde plane. Pour cela, supposons que le champ électromagnétique se propage suivant les x croissants⁴ :

$$\{\vec{E}(x, t), \vec{B}(x, t)\} = \{\vec{E}(u), \vec{B}(u)\} \quad \text{avec} \quad u = x - ct$$

4 : Le lecteur pourra vérifier que les conclusions auxquelles on arrive ne dépendent pas de ce choix.

Déterminons alors le champ magnétique à l'aide de la relation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

Puisque les champs ne dépendent que de la variable $u = x - ct$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{dE_z}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dE_z}{du} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{dB_y}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{dB_y}{du} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{dE_y}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dE_y}{du} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{dB_z}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{dB_z}{du} \end{cases}$$

Après intégration par rapport à u on aboutit à :

$$E_z = -cB_y \quad \text{et} \quad E_y = cB_z$$

Le champ magnétique est donc entièrement déterminé par le champ électrique. On remarque notamment :

- $\vec{E} \perp \vec{B}$ puisque $\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = 0$;
- Le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}_x)$ est direct car $(\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_x > 0$;
- $\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$.

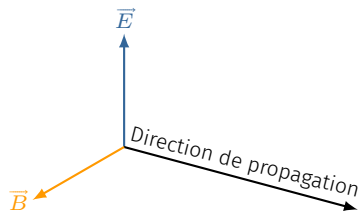


FIG. 5.5 : Structure d'une onde plane.

Finalement on retiendra la structure générale d'une onde plane progressive ou régressive :

Structure d'une onde plane électromagnétique

- L'onde est transversale;
- \vec{E} est perpendiculaire à \vec{B} ;
- $B = E/c$;
- le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}_x)$ est direct.

Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH)

Par définition, une onde plane progressive harmonique est de la forme

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(k(x - ct)) \quad \text{avec} \quad \vec{E}_0 \perp \vec{u}_x$$

où k est appelé **nombre d'onde**. En $x = 0$, le champ oscille comme $\cos(\omega t)$ avec une pulsation

$$\omega = kc \quad \heartsuit \quad (5.3)$$

Cette oscillation présente une période temporelle $T = 2\pi/\omega$ (en s) et une fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$ (en Hz).

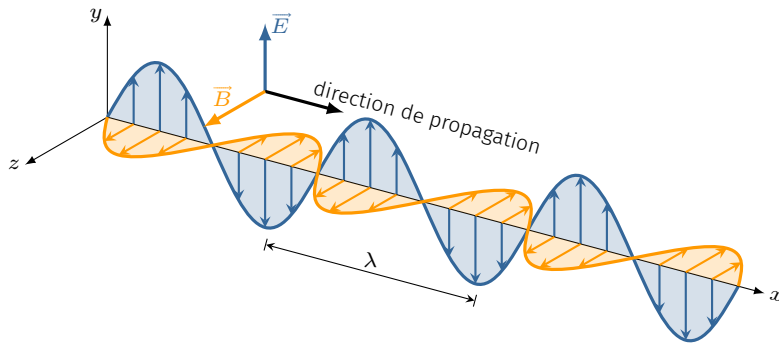


FIG. 5.6 : Structure d'une onde plane harmonique (ici polarisée rectilignement suivant Oy).

Après une durée T le signal s'est propagé d'une longueur λ , dite **longueur d'onde**, telle que

$$\lambda = cT = \frac{2\pi}{k} \quad \heartsuit \quad (5.4)$$

Pour résumer, une onde plane progressive s'écrit sous différentes formes selon que l'on utilise les paramètres (ω, k) ou (T, λ) .

$$\vec{E}(x, t) = \begin{cases} \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx) & \text{avec } \omega = ck \\ \vec{E}_0 \cos[2\pi(t/T - x/\lambda)] & \text{avec } \lambda = cT \end{cases}$$

Finalement, quand on s'intéresse à une onde plane dans le vide, fixer la longueur d'onde c'est fixer la fréquence ν , la pulsation ω , la période T et le nombre d'onde k . Nous verrons qu'il suffit ensuite de préciser l'orientation du champ électrique pour caractériser complètement l'onde plane.

Les premières ondes électromagnétiques découvertes par Hertz présentaient une longueur d'onde de quelques mètres. Ces ondes furent appelées ondes hertziennes (ou onde radio). On a pris l'habitude de découper l'intervalle des longueurs d'onde en différents domaines spectraux qui constituent le *spectre électromagnétique*. Dans le domaine optique, on parlera plutôt d'ondes planes *monochromatiques* car la fréquence du signal électromagnétique détermine la couleur de la lumière visible.

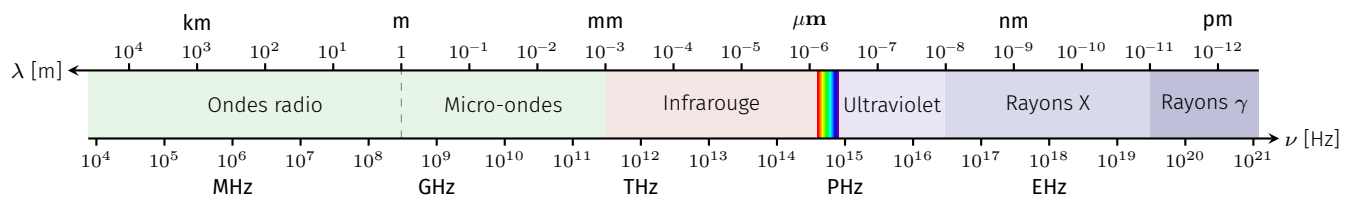


FIG. 5.7 : Spectre électromagnétique.

Vecteur d'onde

Définition

Le vecteur d'onde est un vecteur noté \vec{k} qui présente les propriétés suivantes :

- sa norme donne le nombre d'onde : $|\vec{k}| = k = 2\pi/\lambda$;
- son orientation est donnée par le sens de propagation.

Pour une onde plane se propageant suivant $+\vec{u}_x$, on a donc $\vec{k} = k\vec{u}_x$.

De manière générale, une onde plane qui se propage suivant la direction \vec{u} présente un vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}$. Dans ce cas, l'onde plane harmonique s'écrit

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k\xi)$$

où ξ est la coordonnée le long de l'axe orienté par \vec{u} . Considérons un point M de l'espace et appelons H le projeté orthogonal de M sur l'axe (O, \vec{u}) . H est repéré par la coordonnée ξ . On a alors la propriété suivante :

$$\vec{k} \cdot \vec{OM} = k\vec{u} \cdot (\vec{OH} + \vec{HM}) = k \text{ OH} = k\xi$$

de sorte que l'expression générale d'une onde plane harmonique de vecteur d'onde \vec{k} s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \heartsuit \quad (5.5)$$

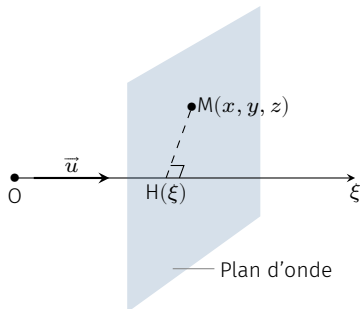


FIG. 5.8 : Plan d'onde se propageant suivant \vec{u} .

On a choisit l'origine des temps de façon à ce que la phase à l'origine soit nulle. Si ce n'est pas le cas, on écrira

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)$$

Notation complexe

Il est souvent pratique d'utiliser la notation complexe pour manipuler les ondes planes harmoniques. L'idée consiste à associer à chaque terme harmonique de la forme $A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$, le nombre complexe

$$Ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)} = \underbrace{Ae^{i\varphi}}_A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

où A est appelé *amplitude complexe*.

La partie imaginaire du nombre complexe $Ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ étant sinusoidale, elle est aussi solution de l'équation d'onde. Ainsi la linéarité des équations de Maxwell garantit que ces représentations complexes soient solutions des équations de Maxwell.

L'intérêt majeur de la notation complexe réside dans la simplification qu'elle apporte dans les opérations de dérivation. On vérifie aisément que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x,y,z} \rightarrow i\omega \times \quad \vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k} \cdot \quad \text{et} \quad \Delta = \vec{\nabla}^2 \rightarrow -k^2 \times$$

Exemple

Montrons à l'aide de la notation complexe qu'une OPPH est nécessairement transversale dans le vide. Partons des équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson dans le vide :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Puis adoptons la notation complexe :

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{B}} = i\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$$

On en déduit immédiatement que les champs \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires au vecteur d'onde et donc à la direction de propagation.

$\underline{\vec{E}}$ désigne dans ce cours le champ électrique en représentation complexe. Idem pour le champ magnétique.

5.3 Polarisation

Généralités

Nous avons vu qu'une onde plane harmonique est entièrement déterminée si l'on connaît deux vecteurs parmi les trois vecteurs \vec{E} , \vec{B} et \vec{k} . On a coutume de choisir le couple (\vec{E}, \vec{k}) pour décrire une telle onde électromagnétique :

- \vec{k} indique sa direction de propagation ainsi que sa longueur d'onde ($k = 2\pi/\lambda$) et donc sa fréquence ($\nu = c/\lambda$).
- \vec{E} détermine complètement la structure du champ électromagnétique puisque $B = E/c$ et le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ est direct.

Le mouvement décrit par l'extrémité du champ électrique, dans le plan d'onde, définit l'**état de polarisation** de l'onde. On distingue trois types de polarisation :

- la polarisation rectiligne ;
- la polarisation circulaire ;
- la polarisation elliptique.

Décrivons en détail ces différentes polarisations.

Polarisation rectiligne

Pour fixer les idées, considérons une OPPH se propageant suivant l'axe des x croissants ($\vec{k} = k\vec{u}_x$). Le champ électrique oscille donc dans un plan parallèle à (yOz) . Adoptons la notation complexe pour exprimer le champ électrique :

$$\underline{\vec{E}}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0^y e^{i(\omega t - kx)} \\ E_0^z e^{i(\omega t - kx)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\underline{E}_0^y, \underline{E}_0^z) \in \mathbb{Z}^2$$

Supposons que chaque composante oscille en phase ou en opposition de phase. Dans ce cas on a

$$\underline{E}_0^z = \alpha \underline{E}_0^y \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Plaçons-nous en $x = 0$ et observons la courbe décrite par l'extrémité du champ électrique.

$$\begin{cases} \underline{E}_y = \underline{E}_0^y e^{i(\omega t)} \\ \underline{E}_z = \underline{E}_0^z e^{i(\omega t)} \end{cases} \xrightarrow{\text{notation réelle}} \begin{cases} E_y(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ E_z(t) = \alpha A \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

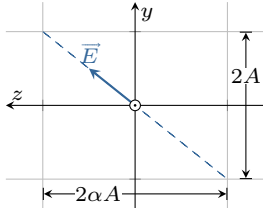


FIG. 5.9 : Polarisation rectiligne. L'extrémité du vecteur \vec{E} décrit le segment en pointillé.

où l'on a posé $\underline{E}_0^y = Ae^{i\varphi}$. Ainsi la composante suivant Oy oscille entre $-A$ et A , et la composante suivant Oz entre $-\alpha A$ et αA . De surcroît, à chaque instant $E_z(t) = \alpha E_y(t)$. Autrement dit, l'extrémité du champ électrique décrit un segment sur la droite d'équation $z = \alpha y$: on dit que l'onde est **polarisée rectilignement**.

La structure de l'onde plane représentée sur la FIG. 5.6 correspond à une onde harmonique polarisée rectilignement suivant l'axe Oy . On a donc $\alpha = 0$ puisque $E_z = 0$.

Polarisation elliptique

Voyons maintenant le comportement du champ électrique dans le cas général où les composantes ne sont ni en phase ni en opposition de phase. Posons

$$\underline{E}_0^y = A_y e^{i\varphi_y} \quad \text{et} \quad \underline{E}_0^z = A_z e^{i\varphi_z}$$

Dans le plan $x = 0$, la vibration électrique s'écrit

$$\begin{cases} \underline{E}_y = \underline{E}_0^y e^{i(\omega t)} \\ \underline{E}_z = \underline{E}_0^z e^{i(\omega t)} \end{cases} \xrightarrow{\text{notation réelle}} \begin{cases} E_y(t) = A_y \cos(\omega t + \varphi_y) \\ E_z(t) = A_z \cos(\omega t + \varphi_z) \end{cases}$$

On montre que l'extrémité du champ électrique trace une ellipse inscrite dans un rectangle d'axes yOz et de dimensions $2A_y \times 2A_z$. On dit alors que l'onde présente une **polarisation elliptique**.

Lorsque cette ellipse est parcourue dans le sens horaire pour un observateur qui voit l'onde se diriger vers lui, on parle de polarisation elliptique droite ; on a alors $\Delta\varphi = \varphi_z - \varphi_y \in]0; \pi[$. Dans le cas contraire, on parle de polarisation elliptique gauche.

Polarisation circulaire

La polarisation circulaire est une polarisation elliptique particulière. Elle se rencontre lorsque les composantes du champ électrique oscillent avec la **même amplitude et en quadrature de phase**. L'ellipse se réduit alors à un cercle parcouru dans le sens horaire (circulaire droite) si $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, et dans le sens anti-horaire (circulaire gauche) si

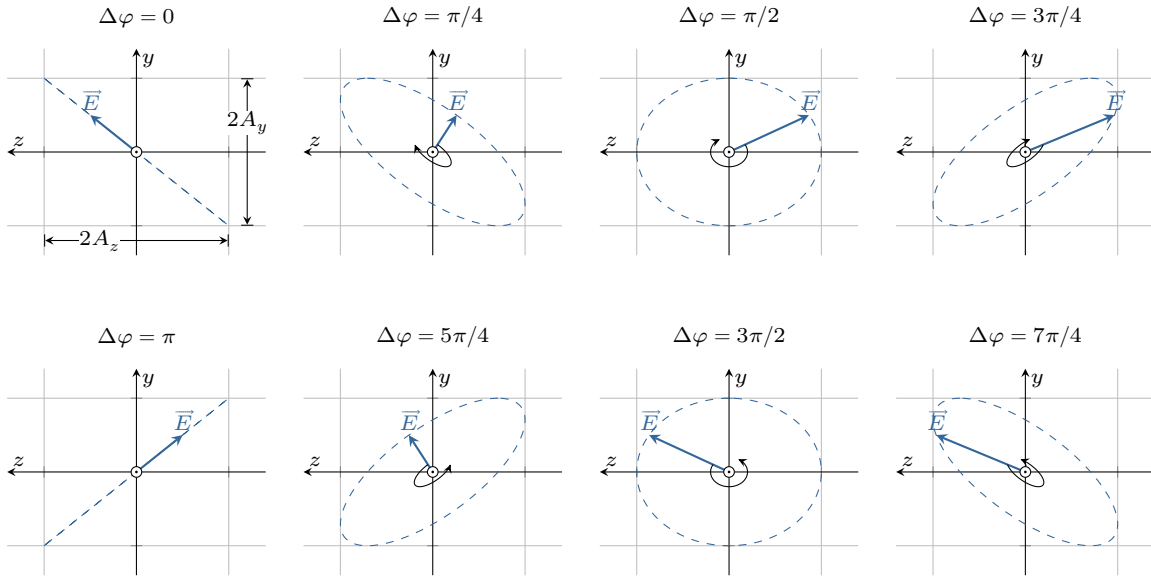


FIG. 5.10 : Différentes polarisations en fonction du déphasage $\Delta\varphi = \varphi_z - \varphi_y$.

$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$. En notation réelle, on obtient

$$\begin{cases} E_y(t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi) \\ E_z(t) = \pm A \sin(\omega t - kx + \varphi) \end{cases}$$

de sorte qu'à chaque instant $E_y(t)^2 + E_z(t)^2 = A^2$: l'extrémité du champ électrique décrit un cercle de rayon A .

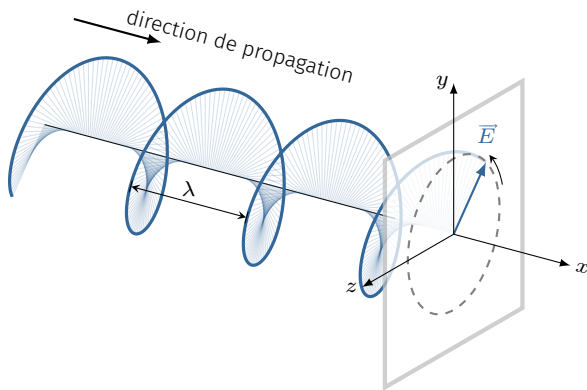


FIG. 5.11 : Structure d'une onde plane harmonique polarisée circulairement (droite).

En notation complexe, on a

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ A e^{i(\omega t - kx + \varphi)} \\ A e^{i(\omega t - kx + \varphi \pm \frac{\pi}{2})} \end{pmatrix} = A e^{i(\omega t - kx + \varphi)} (\vec{u}_y \pm i\vec{u}_z)$$

Il est commode de définir les deux vecteurs suivants :

$$\vec{u}_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}_y + i\vec{u}_z) \quad \text{et} \quad \vec{u}_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}_y - i\vec{u}_z)$$

Ces deux vecteurs forment une base orthonormée⁵ de \mathbb{C}^2 , et sont

5 : On laisse au lecteur le soin de vérifier que $\vec{u}_d \cdot \vec{u}_d^* = \vec{u}_g \cdot \vec{u}_g^* = 1$ et $\vec{u}_d \cdot \vec{u}_g^* = 0$.

associés aux deux états de polarisation circulaire :

$$\begin{aligned} \text{polarisation circulaire droite : } & \vec{E}(M, t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi)} \vec{u}_d \\ \text{polarisation circulaire gauche : } & \vec{E}(M, t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi)} \vec{u}_g \end{aligned}$$

Tout état de polarisation peut être décrit dans cette base. Par exemple, deux ondes de même amplitude et polarisées circulairement -l'une à gauche, l'autre à droite- se composent en donnant une onde polarisée rectilignement :

$$Ae^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_d + Ae^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_g = \sqrt{2}Ae^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$$

Polarisation aléatoire

Une onde plane harmonique est nécessairement polarisée. Toutefois dans la réalité on rencontre plutôt des ondes quasi-harmoniques (ou quasi-monochromatiques). En effet, en première approximation, la lumière naturelle peut être décrite par une émission d'ondes de polarisation elliptique, mais dont la phase varie de façon imprévisible sur une durée caractéristique beaucoup plus courte que le temps de réponse des détecteurs usuels. On dit qu'il s'agit d'ondes *incohérentes*[8] et que la lumière naturelle *n'est pas polarisée*.

[8] : ROUSSEL (2019), *Notion de cohérence*

Cependant, la lumière peut se polariser totalement ou partiellement après interaction avec la matière comme nous allons le voir par la suite.

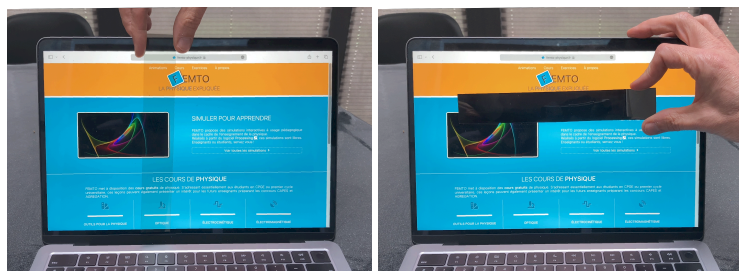
Production de lumière polarisée

Il existe différentes façons d'obtenir une lumière polarisée.

Polarisation par dichroïsme – Certains matériaux ont la particularité d'absorber une composante du champ électrique sans affecter la composante perpendiculaire. On parle de *dichroïsme*. Ces matériaux sont souvent constitués de polymères alignés dans une direction qui correspond à la direction absorbante. Ainsi lorsque l'on envoie une lumière non polarisée au travers de ce matériau, il en ressort une onde polarisée rectilignement suivant la direction perpendiculaire à la direction absorbante. En pratique on utilise couramment des polaroïds⁶ qui se présentent comme des feuilles de plastique transparent, et que l'on appelle polariseurs.

6 : Polaroid® est une marque déposée de la société *Polaroid corporation* fondée en 1937 par Edwin Land pour exploiter commercialement son invention.

FIG. 5.12 : Lorsqu'on présente un Polaroid devant un écran LCD, on s'aperçoit que pour une certaine orientation du polaroid, aucune lumière n'est transmise : la lumière émise par un écran est polarisée rectilignement.



Comme on peut le voir sur [FIG. 5.12](#), un polariseur peut servir à mettre en évidence une lumière polarisée rectilignement. On dit alors que le polariseur est utilisé en *analyseur*.

Polarisation par réflexion vitreuse – Historiquement, la polarisation de la lumière a été découverte par le français Louis Malus en 1809 sur la lumière réfléchie par réflexion vitreuse. Si on envoie de la lumière naturelle sur une substance comme le verre, on observe que la lumière réfléchie est polarisée rectilignement pour une incidence particulière définie par l'angle i_B , dit *angle de Brewster*. Le champ électrique de l'onde réfléchie est alors perpendiculaire au plan d'incidence. L'angle i_B est tel que

$$\tan(i_B) = n$$

où n est l'indice de réfraction du milieu réfléchissant par rapport au milieu ambiant. Dans le cas d'une interface air/verre on trouve $i_B \simeq 56^\circ$, et pour l'interface air/eau $i_B = 53^\circ$. Ainsi, pour des incidences voisines de l'incidence de Brewster, un polariseur dont l'axe de transmission est parallèle au plan d'incidence éliminera une grande partie de la lumière réfléchie ([FIG. 5.13](#)); c'est l'intérêt des lunettes de soleil à verres polarisants.



FIG. 5.13 : Élimination des reflets à la surface d'un extincteur à l'aide d'un polaroid.

Polarisation par biréfringence – Certains cristaux transparents ont la propriété de dédoubler les images à cause du phénomène de double réfraction. Cette *biréfringence* fut initialement observée en 1669 par Erasme Bartholin avec du spath d'Islande, un cristal de calcite. Un rayon incident arrivant sur un tel milieu donne naissance en général à deux rayons réfractés ce qui correspond pour ces rayons à deux valeurs de l'indice de réfraction. Ces deux rayons présentent deux polarisations rectilignes orthogonales entre elles. Les premiers polariseurs utilisèrent cette propriété.



FIG. 5.14 : Double réfraction à travers un cristal de calcite (©Fondo Antigo de la Biblioteca de la Universidad de Sevilla)

ANNEXES

Calcul numérique de l'inductance d'une bobine

A

La détermination de l'auto-inductance L d'un solénoïde ne pose pas de gros problèmes expérimentaux. Associée à un conducteur ohmique et un condensateur, la bobine forme un oscillateur électrique dont la résonance est couramment illustrée dans le secondaire. Rappelons que la fréquence de résonance (résonance d'intensité)

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

permet de déduire L si la capacité C du condensateur est connue¹. Le calcul théorique est quant à lui beaucoup plus délicat. On propose ici une méthode basée sur le calcul de la mutuelle inductance entre deux spires. Il en ressort une formule faisant intervenir des sommes, facile à implémenter dans un programme.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/calcul-inductance-bobine.php>

A.1 Couplage entre deux spires

Avant de s'intéresser au solénoïde, commençons par étudier le couplage électromagnétique entre deux spires circulaires coaxiales parcourues par un courant électrique.

Inductance mutuelle entre deux spires

Considérons deux spires filiformes, l'une de diamètre D_1 , l'autre de diamètre D_2 , et séparées par la distance d_{12} . Parcourue par un courant électrique (d'intensité respectives I_1 et I_2), chaque spire génère un flux magnétique à travers l'autre spire. Appelons $\phi_{1 \rightarrow 2}$ le flux magnétique produit par la spire 1 à travers la spire 2. On montre facilement que

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = M I_1 \quad \text{et} \quad \phi_{2 \rightarrow 1} = M I_2$$

où M , appelée *inductance mutuelle*, traduit le couplage électromagnétique entre les spires. En général, M dépend de la géométrie des circuits en interaction et de leur position relative. Ici, M est fonction de D_1 , D_2 et d_{12} .

Le calcul exact[9-11] fait intervenir les intégrales elliptiques complètes K et E définies par

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{et} \quad E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

A.1 Couplage entre deux spires	79
Inductance mutuelle . . .	79
Calcul de E et K	80
Auto-inductance	81
A.2 Applications	82
Bobine monocouche . . .	82
Bobine multicouche . . .	83

¹ : Voir par exemple le TP *Modélisation d'une bobine* sur physique.ensc-rennes.fr.

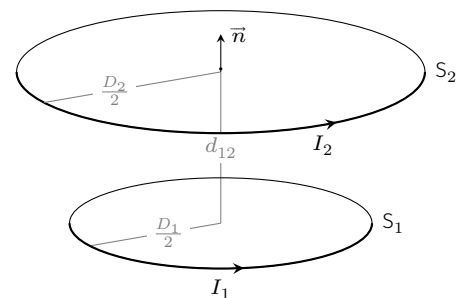


FIG. A.1 : Deux spires en interaction.

[9] : MAXWELL (1891), *A Treatise on Electricity and Magnetism* (reprinted 1954). Vol. One and Two

[10] : RUSSELL (1906), «The magnetic field and inductance coefficients of circular, cylindrical, and helical currents»

[11] : QUEIROZ (2005), «Mutual inductance and inductance calculations by Maxwell's Method»

Maxwell a établi le résultat suivant :

$$M(D_1, D_2, d_{12}) = \mu_0 \sqrt{D_1 D_2} \frac{K(x) - E(x)}{\sqrt{x}}$$

$$\text{avec } \begin{cases} x = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \\ r_1^2 = d_{12}^2 + \frac{1}{4}(D_1 + D_2)^2 \\ r_2^2 = d_{12}^2 + \frac{1}{4}(D_1 - D_2)^2 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Calcul de E et K

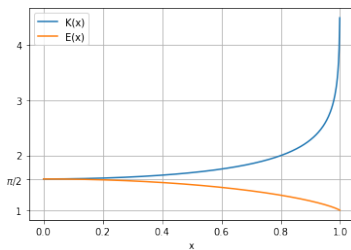


FIG. A.2 : Graphe des fonctions $K(x)$ et $E(x)$.

Les intégrales elliptiques sont des fonctions paires définies sur l'intervalle $]-1,1[$ et on les représente traditionnellement sur l'intervalle $[0,1[$. Sur cet intervalle $K(x)$ est une fonction croissante et divergente en $x = 1$, alors que $E(x)$ décroît entre $\pi/2$ et 1.

Sous **Python**, les fonctions K et E se trouvent dans la bibliothèque **scipy**. On les appelle à l'aide des syntaxes respectives `scipy.special.ellipk` et `scipy.special.ellipe`. Plus exactement, il s'agit des fonctions

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}} \quad \text{et} \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \varphi} d\varphi$$

Le code A.1 permet de tracer les graphes de la FIG. A.2.

Listing A.1 : Exemple de code Python.

```
import numpy as np
import scipy as sp
from scipy import special
import matplotlib.pyplot as plt
xx=np.linspace(0,2,1000)
plt.plot(xx, sp.special.ellipk(xx**2),label='K(x)')
plt.plot(xx, sp.special.ellipe(xx**2),label='E(x)')
plt.yticks([1,np.pi/2,2,3,4],labels=[1,'\pi/2',
,2,3,4])
plt.legend()
plt.grid()
plt.xlabel('x')
```

2 : Méthodes du rectangle à gauche, du rectangle à droite, du trapèze, méthode de Simpson, etc.

[12] : ROUSSEL (2022), *Intégrales elliptiques complètes*

Si les fonctions elliptiques ne sont pas implémentées dans le langage que l'on utilise pour faire des calculs, on peut bien sûr approcher ces intégrales par les méthodes classiques d'intégration numérique². Il existe cependant une manière beaucoup plus efficace et simple à programmer qui repose sur la suite arithmético-géométrique[12]. L'algorithme suivant retourne, après quelques itérations seulement, le résultat $K(x) - E(x)$ avec un niveau de précision fixé par ϵ_0 .

Calcul numérique de $K(x) - E(x)$

- $a \leftarrow 1$
- $b \leftarrow \sqrt{1 - x^2}$
- $c \leftarrow x^2$
- $S \leftarrow c/2$
- $e \leftarrow S$
- $n \leftarrow 1$
- Tant que $(e > \epsilon_0)$ faire :
 - $A \leftarrow (a + b)/2$
 - $B \leftarrow \sqrt{a \times b}$
 - $c \leftarrow A^2 - B^2$
 - $a \leftarrow A$
 - $b \leftarrow B$
 - $e \leftarrow 2^{n-1}c$
 - $S \leftarrow S + e$
 - $n \leftarrow n + 1$
- Retourner $S \times \pi/(2a)$

Auto-inductance d'une spire

L'auto-inductance L est liée au flux magnétique ϕ généré par un circuit *sur lui même*, via la relation : $\phi = LI$. Par conséquent on peut considérer que L est une mutuelle inductance entre deux circuits identiques confondus. Dans le cas d'une spire circulaire de diamètre D , on a

$$L = \lim_{d \rightarrow 0} M(D, D, d) = \lim_{x \rightarrow 1} \mu_0 D \frac{K(x) - E(x)}{\sqrt{k}} = \infty$$

Effectivement, à cause du caractère filiforme de la spire, le champ magnétique diverge au voisinage du fil conducteur, et l'énergie magnétique aussi :

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \infty$$

En réalité, l'auto-inductance d'une spire est finie du fait de l'épaisseur non nulle du fil qui le constitue. Si l'on note e cette épaisseur, une bonne approximation de L est donnée par la formule de Kirchoff :

$$L = \mu_0 D \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{8D}{e} \right) - \frac{7}{8} \right] \tag{A.2}$$

Cette formule suppose une spire de section circulaire traversée par un courant uniformément réparti sur la section. De plus l'épaisseur du fil doit être faible devant le diamètre D de la spire.

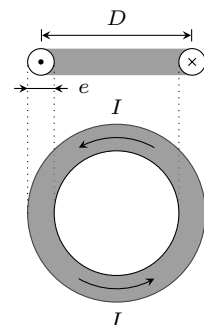


FIG. A.3 : Anneau conducteur. Vues en coupe et de dessus.

A.2 Applications aux solénoïdes

Bobine monocouche

Considérons un solénoïde, constitué par un fil conducteur d'épaisseur e , de section circulaire, enroulé sur un cylindre de diamètre D_0 . Après N tours, la bobine fait une longueur L .

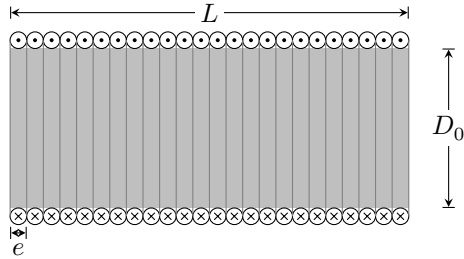


Fig. A.4 : Bobine monocouche vue dans un plan contenant son axe de révolution. Ici $N = 24$.

3 : Si l'on tient compte de l'épaisseur e' de l'isolant entourant le fil conducteur, la distance qui sépare deux spires voisines vaut $e + 2e'$. Pour notre propos nous négligerons e' devant e .

En pratique, l'épaisseur du fil est souvent faible devant le diamètre D_0 de sorte que l'on peut négliger l'hélicité de l'enroulement, et considérer la distribution de courant équivalente à N spires circulaires, coaxiales et jointives³.

Alimentée par un courant d'intensité I , chaque spire produit un flux magnétique à travers les autres et elle-même. Le flux total ϕ qui traverse toutes les spires s'écrit

$$\phi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_{i \rightarrow j} = \sum_{i=1}^N \phi_{i \rightarrow i} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \phi_{i \rightarrow j}$$

4 : On note $D_1 = D_0 + e$ ce diamètre.

où $\phi_{i \rightarrow i}$ représente le flux propre de la i -ième spire et $\phi_{i \rightarrow j}$ le flux engendré par la i -ième spire sur la j -ième. Toutes les spires étant de même épaisseur et de même diamètre⁴, on a

$$\phi_{i \rightarrow i} = LI \quad \text{avec} \quad L = \mu_0 D_1 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{8D_1}{e} \right) - \frac{7}{8} \right]$$

et

$$\phi_{i \rightarrow j} = \phi_{j \rightarrow i} = M(D_1, D_1, |j - i|e) I$$

Par conséquent, le flux magnétique qui traverse la bobine s'écrit

$$\phi = \left[NL + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N M(D_1, D_1, d_{ij}) \right] I = \left[NL + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j > i}^N M(D_1, D_1, d_{ij}) \right] I$$

On peut encore simplifier l'expression car la mutuelle inductance entre deux spires ne dépend que de la distance qui les sépare. On décompte $N - 1$ paires de spires séparées de e , $N - 2$ paires de spires séparées de $2e, \dots$, $N - i$ paires séparées de ie . Finalement, le flux magnétique s'écrit

$$\phi = \left[NL + 2 \sum_{\ell=1}^{N-1} (N - \ell) M(D_1, D_1, \ell e) \right] I = L_{\text{bobine}} I$$

On en déduit la formule donnant l'auto-inductance d'une bobine

mono-couche :

$$L_{\text{bobine}} = NL + 2 \sum_{\ell=1}^{N-1} (N - \ell) M(D_1, D_1, \ell e) \quad (\text{A.3})$$

Relation d'autant plus juste que l'épaisseur e est faible devant le diamètre du solénoïde.

Bobine multicouche

On réalise une bobine multicouche en enroulant le fil électrique sur plusieurs couches. Si l'on note N_c le nombre de couches et p le nombre de spires par couche, on a $N = pN_c$. On peut reprendre le calcul

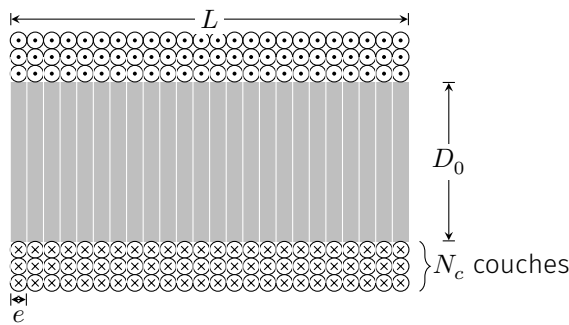


FIG. A.5 : Bobine multi-couche. Ici $N_c = 3$

général et tenir compte du fait que les spires n'ont pas les mêmes diamètres :

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_{i \rightarrow i} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \phi_{i \rightarrow j}$$

Toutefois, ce calcul représente une somme de N^2 termes, ce qui peut être prohibitif en termes de temps de calcul. C'est pourquoi, nous allons chercher à exprimer le flux en effectuant un minimum de sommes.

Tout d'abord, appelons L_k l'auto-inductance d'une spire de la couche k ($k = 1, \dots, N_c$) de diamètre D_k . On a

$$D_k = D_0 + e(2k - 1)$$

$$\sum_{i=1}^N \phi_{i \rightarrow i} = \left(\sum_{k=1}^{N_c} p L_k \right) I \quad \text{avec} \quad L_k = \mu_0 D_k \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{8D_k}{e} \right) - \frac{7}{8} \right] \quad (\text{A.4})$$

Quant au calcul des $\phi_{i \rightarrow j}$, il faut distinguer deux types de situations.

1. Les spires en interaction appartiennent à la même couche. On notera ϕ_{intra} cette contribution.
2. Les spires en interactions sont sur deux couches différentes. On notera ϕ_{extra} cette dernière contribution.

On a vu précédemment que le flux lié aux spires d'une même couche est donné par (A.3). Ici, le nombre de spires sur une couche vaut p , et on ne s'intéresse pas au flux propre. En répétant le calcul pour toutes les couches, on trouve

$$\phi_{\text{intra}} = \left[2 \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{\ell=1}^{p-1} (p - \ell) M(D_k, D_k, \ell e) \right] I$$

Pour ce qui est des interactions entre les spires de diamètres différents, on distingue également deux situations :

1. Considérons une spire sur la couche k en interaction avec une spire *concentrique* sur la couche k' . Pour chaque paire de couches (k, k') il y a p telles interactions. Leur contribution en termes de flux vaut donc

$$\phi_{\text{inter}}^1 = I \sum_{k, k' \neq k}^{N_c} p M(D_k, D_{k'}, 0) = 2pI \sum_{k=1}^{N_c-1} \sum_{k' > k}^{N_c} M(D_k, D_{k'}, 0)$$

2. Considérons maintenant une spire de la couche k en interaction avec une spire *non concentrique* d'une couche $k' \neq k$. Comptons tout d'abord le nombre de spires décalées de e : cela revient à compter l'ensemble des couples d'entiers $(i, j) \in [1, \dots, p]^2$ tel que $|j - i| = 1$. On en a $p - 1$ quand $j - i = 1$ et $p - 1$ quand $j - i = -1$. Au total on trouve $2(p - 1)$. De la même façon, on trouve $2(p - 2)$ spires en interactions décalées de $2e$, etc. Finalement, ce type d'interaction donne lieu à la contribution

$$\begin{aligned} \phi_{\text{inter}}^2 &= I \sum_{k, k' \neq k}^{N_c} \sum_{\ell=1}^p 2(p - \ell) M(D_k, D_{k'}, \ell e) \\ &= 4I \sum_{k=1}^{N_c-1} \sum_{k' > k}^{N_c} \sum_{\ell=1}^p (p - \ell) M(D_k, D_{k'}, \ell e) \end{aligned}$$

En calculant $\phi = \sum_{i=1}^N \phi_{i \rightarrow i} + \phi_{\text{intra}} + \phi_{\text{inter}}^1 + \phi_{\text{inter}}^2$ et en fixant $I = 1$ A, on obtient directement la self-inductance de la bobine multicouche :

$$L_{\text{bobine}} = p(S_1 + 2S_2) + 2S_3 + 4S_4 \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = \sum_{k=1}^{N_c} L_k \\ S_2 = \sum_{k=1}^{N_c-1} \sum_{k' > k}^{N_c} M_{k, k'}^0 \\ S_3 = \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{\ell=1}^{p-1} (p - \ell) M_{k, k}^{\ell} \\ S_4 = \sum_{k=1}^{N_c-1} \sum_{k' > k}^{N_c} \sum_{\ell=1}^p (p - \ell) M_{k, k'}^{\ell} \\ M_{k, k'}^{\ell} = M(D_k, D_{k'}, \ell e) \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

Cette relation généralise (A.3). On peut vérifier que l'on retrouve bien le cas de la bobine simple lorsque $N_c = 1$. C'est cette relation qui est utilisée dans le [calculateur d'autoinductance en ligne](#) que l'on trouve sur [femto-physique.fr](#).

Pour en savoir plus

- [1] Steven DIGIANNURIO, Peter PEREZ DE CORCHO et Christopher PRUITT. *A History of the Divergence, Green's, and Stokes' Theorems*. (visité le 2 juin 2020). 2005. URL : <https://christopherpruitt.files.wordpress.com/2015/01/a-history-of-the-divergence-greens-and-stokes-theorems.pdf> (cf. p. 4).
- [2] Liang-Cheng TU et Jun LUO. « Experimental tests of Coulomb's Law and the photon rest mass ». In : *Metrologia* 41.5 (2004), S136 (cf. p. 16).
- [3] John David JACKSON, Christian JEANMOUGIN et Jean-Pol VIGNERON. *Electrodynamique classique : cours et exercices d'électromagnétisme*. Dunod, 2001 (cf. p. 25).
- [4] H. GIÉ et J-P. SARMANT. *Électromagnétisme*. T. 1. Tec et Doc (Lavoisier), 1985 (cf. p. 30).
- [5] André DEIBER et Hervé IDDA. « Freinage par courants de foucault (II) : Des charges réparties en volume guident les courants induits ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 891 (2007), p. 177-197 (cf. p. 48).
- [6] J. ROUSSEL et D. CORDIER. « Courants de Foucault induits dans un cylindre conducteur - Approche numérique ». In : *Bull. Un. Phys* 105.938(2) (nov. 2011), p. 101-114 (cf. p. 52).
- [7] J. ROUSSEL. *Les opérateurs différentiels*. Fév. 2013. URL : <https://femto-physique.fr/omp/operateurs-differentiels.php> (cf. p. 64).
- [8] J. ROUSSEL. *Notion de cohérence*. Jan. 2019. URL : <https://femto-physique.fr/optique/> (cf. p. 74).
- [9] James Clerk MAXWELL. *A Treatise on Electricity and Magnetism (reprinted 1954)*. Vol. One and Two. 1891 (cf. p. 79).
- [10] Alexander RUSSELL. « The magnetic field and inductance coefficients of circular, cylindrical, and helical currents ». In : *Proceedings of the Physical Society of London (1874-1925)* 20.1 (1906), p. 476 (cf. p. 79).
- [11] Antonio Carlos M de QUEIROZ. « Mutual inductance and inductance calculations by Maxwell's Method ». In : *Home page of Dr. Antonio Carlos M. de Queiroz* (2005) (cf. p. 79).
- [12] J. ROUSSEL. *Intégrales elliptiques complètes*. Juill. 2022. URL : <https://femto-physique.fr/analyse-numerique/> (cf. p. 80).
- [13] Jean PÉRICART. *Cours d'électricité théorique, Tome 1 : Electrostatique - Electrocinétique*. 1962.

Grandeurs physiques et symboles mathématiques

Constantes physiques définies par le SI (valeurs exactes)

h	Constante de Planck	$6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$
c	Vitesse de la lumière dans le vide	$299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	Fréquence hyperfine du ^{133}Cs	$9\,192\,631\,770 \text{ Hz}$
e	Charge élémentaire	$1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$
k_{B}	Constante de Boltzmann	$1,380\,649 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
N_{A}	Nombre d'Avogadro	$6,022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
$R = k_{\text{B}}N_{\text{A}}$	Constante des gaz parfaits	$8,314\,462\,618 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
K_{cd}	Efficacité lumineuse	$683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$

Autres constantes physiques

G	Constante gravitationnelle	$6,67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
ϵ_0	Permittivité diélectrique du vide	$8,85418781 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
μ_0	Perméabilité magnétique du vide	$1,256637062 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
m_{e}	Masse de l'électron au repos	$9,10938370 \times 10^{-31} \text{ kg}$
m_{p}	Masse du proton au repos	$1,672621923 \times 10^{-27} \text{ kg}$
m_{n}	Masse du neutron au repos	$1,674927498 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Grandeurs physiques

α	Polarisabilité (m^3)
γ	Conductivité électrique ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$)
λ	Densité linéique de charge ($\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$)
\mathcal{E}	Energie (J)
\mathcal{P}	Puissance (W)
\mathcal{V}	Volume (sa mesure en m^3)
μ	Mobilité électrique (T^{-1})
ν	Fréquence (Hz)
ω	Vitesse angulaire, pulsation ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
$\vec{\Gamma}$	Moment d'un couple (N.m)

$\vec{\mu}$	Moment dipolaire magnétique (A.m ²)
\vec{B}	Champ magnétique (T)
\vec{E}	Champ électrique (V.m ⁻¹)
\vec{f}, \vec{F}	force, résultante des forces (N)
\vec{j}_e	Densité de courant électrique (A.m ⁻²)
\vec{p}	Moment dipolaire électrique (C.m)
\vec{p}	Quantité de mouvement (kg.m.s ⁻¹)
\vec{v}	Vitesse (m.s ⁻¹)
ϕ_B	Flux magnétique (Wb)
ϕ_E	Flux électrique (V.m)
ρ_e	Densité volumique de charge (C.m ⁻³)
σ_e	Densité surfacique de charge (C.m ⁻²)
C	Capacité électrique (F)
e	Force électromotrice (V)
i, I	Intensité électrique (A)
L	Auto-inductance (H)
m	Masse (kg)
n	Densité de particules (m ⁻³)
q, Q	Charge électrique (C)
R	Rayon de courbure (m)
R, r	Résistance électrique (Ω)
R_H	Constante de Hall (m ³ .C ⁻¹)
S	Surface (sa mesure en m ²)
T	Période (s)
T	Température (K)
t	Temps (s)
u ou U	Tension électrique (V)
V	Potentiel électrique (V)
W	Travail (J)
w	Densité d'énergie (J.m ⁻³)
ϵ_r	Permittivité diélectrique relative (sans unité)

Symboles mathématiques

$\stackrel{\text{def}}{=}$	Relation de définition
\sim	Égal en ordre de grandeur
$A \gg B$	A très grand devant B
$A \ll B$	A très petit devant B
\bar{f}	Moyenne temporelle de $f(t)$
$\langle f \rangle$	Moyenne d'ensemble de f
$\frac{df}{dt}$	Dérivée première par rapport au temps
$\frac{d^n f}{dt^n}$	Dérivée n-ième par rapport au temps
$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$	Base cartésienne
(r, θ, z)	Coordonnées cylindriques
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$	Base cylindrique
(r, θ, φ)	Coordonnées sphériques
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$	Base sphérique
A_z	Composante suivant l'axe (Oz) : $A_z = \vec{A} \cdot \vec{u}_z$
$\int_{\mathcal{D}}$	Intégration sur un domaine \mathcal{D}
$\int_C \vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell}$	Circulation de \vec{A} le long du circuit C
$\iint_S \vec{A}(M) \cdot \vec{n} dS$	Flux d'un champ vectoriel \vec{A}
$\iiint_V f(M) d\tau$	Intégrale de volume
$\overrightarrow{\text{grad}}f$ ou $\vec{\nabla}f$	Gradient d'un champ scalaire
$\text{div}\vec{A}$ ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	Divergence d'un champ vectoriel
$\text{rot}\vec{A}$ ou $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$	Rotationne d'un champ vectoriel
$\Delta f = \nabla^2 f$	Laplacien scalaire
$\sum_{\text{couples } (i,j)} = \sum_i \sum_{j < i}$	Somme sur les couples (i, j) avec $i \neq j$



2026