

COURS DE PHYSIQUE

ÉLECTROSTATIQUE & MAGNÉTOSTATIQUE


JIMMY ROUSSEL

2026

Cours d'électromagnétisme - Partie I – femto-physique.fr

JIMMY ROUSSEL, professeur agrégé à l'Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Rennes

Copyright © 2026 Jimmy Roussel

 Ce document est sous licence *Creative Commons* «Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 4.0 International (CC BY-NC 4.0)».

Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Ce document est réalisé avec l'aide de *KOMA-Script* et \LaTeX en utilisant la classe *kaobook*.

1^{re} édition – Nov. 2015

Version en ligne – femto-physique.fr/electromagnetisme

Préface

Ce document est la première partie du cours d'électromagnétisme que vous pouvez trouver sur femto-physique.fr. On se concentre ici sur les phénomènes stationnaires, pour lesquels les effets magnétiques et électriques sont découplés.

Ce cours s'adresse plus particulièrement à des étudiants de premier cycle universitaire ou élèves des CPGE. Les candidats au CAPES ou à l'Agrégation peuvent y trouver également matière à réflexion.

J'ai essayé le plus possible d'illustrer les différentes notions par des exemples ou de simples exercices. Toutefois, pour un entraînement plus poussé, j'invite le lecteur à se procurer l'eBook suivant :

- ▶ *Électromagnétisme 1^{re} Partie – 83 exercices et problèmes corrigés* ;

disponibles à l'adresse payhip.com/femto

Jimmy Roussel

Table des matières

Preface	iii
Table des matières	v
1 INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE	1
1.1 Loi de Coulomb	1
1.2 Le champ électrique	4
2 POTENTIEL ET ÉNERGIE ÉLECTRIQUES	9
2.1 Potentiel électrostatique	9
2.2 L'énergie électrostatique	13
3 LE DIPÔLE ÉLECTRIQUE	17
3.1 L'approximation dipolaire	17
3.2 Interactions dipolaires	22
4 CONDUCTEURS ÉLECTRIQUES	27
4.1 Conduction électrique	27
4.2 Conducteurs en équilibre électrostatique	31
4.3 Notion de capacité	35
5 INTERACTIONS MAGNÉTIQUES	41
5.1 Les aimants	41
5.2 Force de Lorentz	42
5.3 Interaction magnétique avec les courants électriques	47
6 CHAMP B CRÉÉ PAR DES COURANTS ÉLECTRIQUES	53
6.1 Loi de Biot et Savart	53
6.2 Champ créé par un dipôle magnétique	58
ANNEXES	63
A Calcul de l'action magnétique subie par une spire circulaire	65
Pour en savoir plus	67
Grandeurs physiques et symboles mathématiques	69

Table des figures

1.1	Expérience 1	2
1.2	Plus la baguette se rapproche de l'électroscope, plus les aiguilles s'écartent.	2
1.3	Répulsion ou attraction électrostatique	2
1.4	Expérience de Coulomb	3
1.5	Distribution de N charges q_i placées en P_i	4
1.6	Ligne de champ \mathcal{C}	5
1.7	Carte de champ d'une charge ponctuelle positive.	5
1.11	Distribution présentant un plan d'anti-symétrie.	6
1.8	Carte de champ d'un doublet électrostatique.	6
1.9	Carte de champ d'un système de 2 charges positives.	6
1.10	Distribution présentant un plan de symétrie.	6
1.12	Calcul du champ créé par un segment chargé	8
2.1	Travail de la force électrostatique.	9
2.3	Les équipotentiels coupent les lignes de champ à angle droit.	12
2.2	Représentations d'un champ scalaire.	12
2.4	Distribution de N charges ponctuelles.	14
3.1	Doublet électrostatique	17
3.2	Distribution de N charges ponctuelles.	18
3.3	Lignes de champ et équipotentiels créées par un dipôle.	22
3.5	Profil énergétique	23
3.4	Dipôle rigide dans un champ uniforme.	23
3.6	Potentiel de Lennard-Jones.	26
4.1	Calcul du débit de charge traversant une section.	28
4.2	Modèle de Drude.	29
4.3	Cylindre conducteur.	30
4.4	Champ au voisinage de la surface d'un conducteur.	32
4.5	Flux du champ électrique d'une charge ponctuelle à travers une sphère	33
4.6	Influence partielle. ©2004 Thomson - Brooks/Cole	37
4.7	Effets de bords d'un condensateur plan	38
4.8	Fabrication d'un condensateur plan réel	38
5.1	Aiguille aimantée	41
5.2	Interactions entre aimants.	41
5.3	Spectre magnétique	42
5.5	Force magnétique.	43
5.4	Déflexion magnétique.	43
5.6	Mouvement hélicoïdal d'une particule dans un champ magnétique	44
5.7	Principe du cyclotron (la charge est négative ici).	45
5.8	Principe du spectromètre de masse	46
5.9	Notations pour la force de Laplace.	47
5.10	Effet Hall	48
5.11	Circuit électrique rectangulaire en mouvement dans un champ magnétique.	49
5.12	Illustration de la règle du flux maximum.	51
5.13	Moment dipolaire magnétique	51

5.14	Dipôle rigide dans un champ uniforme.	51
6.1	Expérience d'Ørsted.	53
6.2	Expériences d'Ampère.	53
6.4	Notations utilisées dans la loi de Biot et Savart.	54
6.3	Expérience de Rowland	54
6.5	Champ magnétique créé par un fil rectiligne infini.	55
6.6	Champ magnétique créé par un fil infini.	56
6.7	Cartes de champ d'une spire (à gauche) et d'un solénoïde (à droite).	56
6.8	Transformation d'un vecteur axial par un plan de symétrie.	57
6.9	Calcul du champ magnétique produit sur l'axe d'une spire.	58
6.10	Carte de champ d'un dipôle magnétique dans l'approximation dipolaire	60
6.11	Champ magnétique terrestre	60
6.12	Origine du magnétisme des aimants - Expérience de l'aimant brisée.	61
A.1	Spire circulaire en présence d'un champ magnétique extérieur.	65

Liste des tableaux

2.1	Ordres de grandeur	13
3.1	Entités chimiques et types d'actions électriques produits.	20
3.2	Moments dipolaires des halogénures d'hydrogène.	20
4.1	Quelques ordres de grandeur	28
4.2	Ordres de grandeur de conductivités électriques.	29
4.3	Permittivités diélectriques relatives de quelques matériaux.	39

INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE

1

L'électromagnétisme consiste en l'étude des phénomènes qui font intervenir des charges en mouvement (courants électriques, antenne radio, conductimétrie, courants de Foucault,...). On se restreint, pour l'instant, aux phénomènes indépendants du temps ce qui permet de séparer l'étude des effets magnétiques et électriques. Ce cours aborde l'électrostatique, c'est-à-dire l'étude du champ électrique produit par des charges immobiles.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/interaction-electrostatique.php>

1.1 Loi de Coulomb	1
Quelques faits	1
Notion de charge électrique	2
Loi de Coulomb	3
1.2 Le champ électrique	4
Cas d'un système de charges	4
Topographie - Symétrie	5
Distribution continue	7

1.1 Loi de Coulomb

Quelques faits expérimentaux

Les premières observations – Il y a plus de 2 600 ans, les savants grecs avaient déjà constaté que l'ambre jaune (une résine naturelle) frottée énergiquement avec une fourrure avait la faculté d'attirer les corps légers tels que les cheveux ou fétus de paille. C'est d'ailleurs le mot grec $\etaλεκτρον$ ¹, signifiant ambre, qui est à l'origine du terme «électricité»². Cette électrisation par frottement, dite *triboélectricité*, s'observe facilement dans la vie quotidienne. Parfois une forte électrisation peut même produire des étincelles comme lorsqu'on enlève un pull de laine rapidement (à condition d'être dans une pièce sombre pour percevoir ces étincelles). L'éclair, lors d'un orage, est un phénomène d'électricité statique impressionnant qui fut longtemps craint par les hommes. Il fallut attendre B. Franklin en 1752 pour identifier la nature électrique du phénomène et pour maîtriser les dégâts du tonnerre par l'invention du paratonnerre.

Les deux formes de l'électricité – C'est Charles du Fay qui observa les deux formes d'électricité. On peut mettre en évidence ces deux formes par les expériences suivantes.

Expérience 1 Un pendule électrostatique est constitué d'une bille de polystyrène recouverte d'une feuille d'aluminium suspendue à une potence par un fil. Lorsqu'on approche une baguette électrisée du pendule, la bille est attirée par la baguette. Après contact avec la baguette, elle est repoussée.

Expérience 2 Si on électrise un pendule électrostatique par contact avec une baguette chargée, et que l'on approche successivement d'autres baguettes électrisées, on s'aperçoit que la boule du pendule est soit attirée, soit repoussée par les diverses baguettes. On peut donc en déduire qu'il existe deux types de forces électriques.

1 : *êlektron*

2 : Terme introduit en 1600 par William Gilbert dans son ouvrage *De Magnete*.

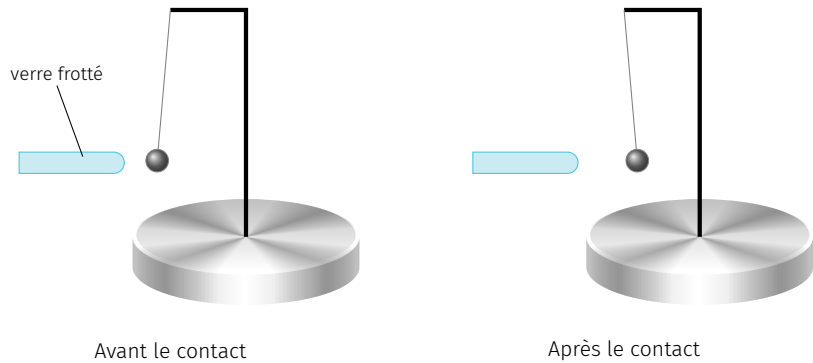


FIG. 1.1 : Expérience 1

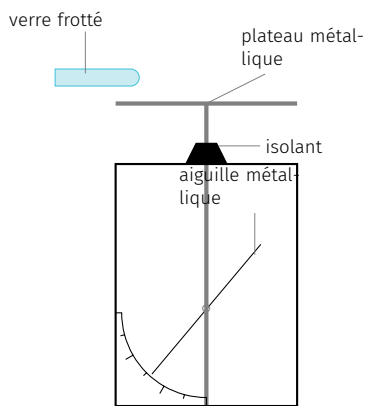


FIG. 1.2 : Plus la baguette se rapproche de l'électroscope, plus les aiguilles s'écartent.

Électrisation par influence –

Expérience 3 Un électroscope est constitué d'une tige métallique à laquelle on fixe une aiguille métallique pouvant librement tourner autour d'un axe. On fixe parfois deux feuilles très fines en or ou en aluminium. L'ensemble est placé dans une enceinte transparente et isolante (verre). Lorsqu'on approche une baguette électrisée de l'électroscope (sans le toucher), l'aiguille s'écarte de la verticale. Si on éloigne la baguette, l'aiguille retrouve sa position verticale de repos. Il y a électrisation de la tige et de l'aiguille sans contact, seulement par influence.

Notion de charge électrique

Jusqu'au XVIII^e siècle, l'électricité est une science essentiellement qualitative et il faut attendre le début du XIX^e siècle pour qu'une théorie mathématique de l'électricité émerge : c'est l'électrostatique. La notion de charge électrique algébrique s'est imposée au fil du temps car elle permettait de décrire correctement les phénomènes. De nos jours, on admet les hypothèses suivantes.

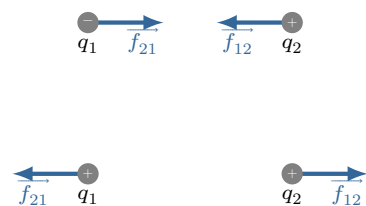


FIG. 1.3 : Répulsion ou attraction électrostatique

- ▶ La matière est constituée de particules que l'on peut caractériser par une propriété scalaire, noté q et désignant la **charge électrique**. Cette charge est positive, négative ou nulle (on parle de particule neutre dans ce cas).
- ▶ Deux particules possédant une électricité de même nature, c'est-à-dire une charge de même signe, se repoussent; elles s'attirent dans le cas contraire.
- ▶ La charge étant caractéristique de la matière, elle ne dépend pas du référentiel.
- ▶ Par ailleurs, la charge électrique d'un système isolé se conserve.
- ▶ Enfin, Millikan a montré en 1906 (Prix Nobel 1923) que la charge électrique est quantifiée. C'est en étudiant la chute de microscopiques gouttes d'huile électrisées, entre les armatures d'un condensateur, qu'il mit en évidence le caractère discontinu de la charge :

$$q = Ne \quad \text{avec} \quad N \in \mathbb{Z}$$

où e désigne la **charge élémentaire**. De nos jours, on sait que ce caractère granulaire de la charge trouve son origine dans

la structure atomique de la matière : tout corps matériel est constitué d'atomes eux même formés d'un noyau chargé positivement (découvert en 1911 par Rutherford) autour duquel « gravitent » des électrons, particules élémentaires possédant toutes la même charge $q_e = -e$. La plupart des phénomènes électriques sont liés à un déplacement et/ou apport et/ou retrait d'électrons à la matière.

Le concept de charge permet d'expliquer les différentes expériences décrites précédemment :

Expérience 1 Lorsqu'on approche la baguette électrisée de la sphère métallique, les électrons libres du métal sont attirés par le verre chargé positivement, laissant derrière eux des charges positives. Bien que la charge globale reste nulle, la force résultante est attractive : en effet, l'attraction entre les électrons et le verre l'emporte sur la répulsion entre les charges positives du conducteur et le verre. Après un contact, quelques électrons sont transférés sur la baguette en verre ce qui rend la sphère métallique globalement positive d'où la répulsion observée³.

Expérience 2 Le frottement d'un corps sur un autre induit un transfert d'électrons dans un sens qui dépend des corps frottés l'un contre l'autre. C'est pourquoi, il est possible d'électriser positivement ou négativement une baguette. On peut donc produire une répulsion ou une attraction.

Expérience 3 Les charges positives du verre électrisé attirent les électrons libres du plateau métallique faisant apparaître au niveau de l'aiguille et de la tige métallique un défaut d'électrons (des charges +). L'aiguille métallique est alors d'autant plus repoussée par la tige qu'elle est chargée. La rotation de l'aiguille est donc d'autant plus importante que la baguette se rapproche.

3 : Il faut quand même signaler que lorsque l'expérience est réalisée avec une baguette faiblement électrisée, la sphère conductrice vient s'y coller sans être ensuite repoussée : c'est le phénomène d'adhérence électrique. En revanche si la baguette est suffisamment chargée, la pression entre les deux corps est plus forte ce qui favorise un transfert d'électrons. À l'extrême, lorsque le verre est fortement chargé, le transfert de charge s'effectue sans qu'il y ait contact, mais par un simple effet de pointe (cf. le [Chapitre 4](#) sur les conducteurs)

Loi de Coulomb

À la fin du XVIII^e siècle, l'idée que les charges produisent une force de type newtonien (en $1/r^2$) était une hypothèse séduisante mais difficile à prouver expérimentalement.

L'expérience de Coulomb – C'est en 1785 que Coulomb⁴ met en évidence, à l'aide d'une balance de torsion qu'il a réalisée lui-même, la loi qui porte désormais son nom. L'expérience consiste à fixer une boule de sureau B à l'extrémité d'une tige isolante, suspendue en son milieu à un fil d'argent dont on peut contrôler l'angle de torsion. Ce système étant au repos, on approche une autre boule A tenue par une tige isolante au contact de la boule B. Ensuite, on électrise les deux boules simultanément de sorte qu'elles acquièrent la même charge Q . La boule A est maintenue en place et la boule B s'éloigne sous l'action de la force électrique. À l'équilibre, le moment de la force électrique compense le couple de torsion. Il suffit ensuite d'augmenter, de façon contrôlée, la torsion du fil pour rapprocher les boules et mesurer la force pour des distances plus faibles. C'est ainsi que Coulomb trouva que la force électrique varie en $1/r^2$.

4 : **Charles-Augustin Coulomb (1736-1806)** : ingénieur militaire français et fin expérimentateur distingué par l'Académie des Sciences. Il est connu pour ses travaux sur l'électricité et le magnétisme, son invention du pendule de torsion et ses travaux sur les frottements.

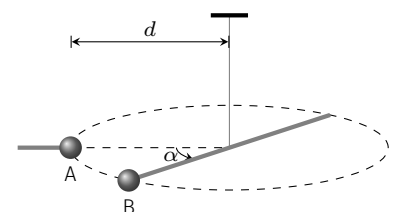


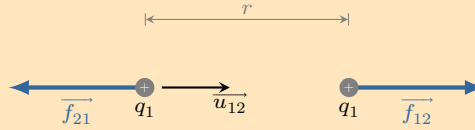
FIG. 1.4 : Expérience de Coulomb

Pour résumer, la force électrique - dite aussi *force coulombienne* - entre deux charges ponctuelles immobiles dans le vide varie comme l'inverse du carré de la distance qui les sépare et dépend de leur quantité de charge.

Histoire

Les résultats de Coulomb furent contestés en son temps et il faudra une vingtaine d'années pour que la loi en $1/r^2$ s'impose partout, plus pour la validité de ses conséquences que par les mesures de Coulomb. L'histoire a finalement retenu la démonstration expérimentale de Coulomb. Cependant, il ne faudrait pas oublier la contribution de Cavendish, un brillant expérimentateur, qui, avant Coulomb, a réussi à montrer de façon fort élégante que l'interaction électrique pouvait se décrire par une force en $1/r^n$ avec $n = 2,00 \pm 0,04$; résultat beaucoup plus précis que celui de Coulomb[1].

Loi de Coulomb



$$\vec{f}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} \quad (1.1)$$

où \vec{u}_{12} est un vecteur unitaire. Dans le Système International d'Unités, les charges s'expriment en coulomb (symbole : C) et la constante K vaut

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9,0.10^9 \text{ m.F}^{-1}$$

où ϵ_0 désigne la *permittivité diélectrique du vide*.

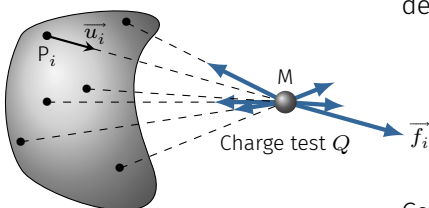
Exercice – Dans l'atome d'hydrogène, comparer la force électrique que ressent l'électron de la part du proton avec la force gravitationnelle. On donne la charge élémentaire $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$, la masse de l'électron $m_e = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$ et la masse du proton $m_p = 1,66.10^{-27} \text{ kg}$.

Rép. Le rapport de la force électrique sur la force gravitationnelle vaut environ $2 \cdot 10^{39}$

1.2 Le champ électrique

Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

Considérons une distribution de charges ponctuelles (q_1, \dots, q_N) placées en différents points $P_{i=1\dots N}$ et une charge test Q placée en M . Cherchons à exprimer la force qu'exerce cette ensemble de charges sur la charge test. On admet que l'interaction électrique obéit au principe de superposition : la force résultante est la *somme vectorielle* des forces qu'exercent chacune des charges q_i sur la charge Q soit



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i = \sum_{i=1}^N \frac{Qq_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i \quad \text{avec } r_i = P_i M$$

Ce qui permet d'écrire

$$\vec{F} = Q\vec{E}(M) \quad \text{avec } \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i \quad \heartsuit \quad (1.2)$$

FIG. 1.5 : Distribution de N charges q_i placées en P_i .

Où $\vec{E}(M)$ désigne le champ électrique créé en M par la distribution de charges. Ce vecteur est défini en tout point de l'espace⁵ : il s'agit d'un **champ vectoriel**. On peut voir $\vec{E}(M)$ comme une propriété locale de l'espace. Notez que lorsque l'on change la charge q_i en q'_i cela modifie le champ électrique en M mais de façon non instantané. On verra que toute perturbation électromagnétique se propage à la vitesse de la lumière dans le vide.

Ordre de grandeur – Dans le Système international d'unités, l'intensité du champ électrique se mesure en **volt par mètre** (symbole $V \cdot m^{-1}$). Le champ à la surface de la Terre vaut environ 100-150 V/m en dehors des périodes d'orage. En période d'orage, le champ terrestre est inversé et est de l'ordre de 10 kV/m. Il peut même atteindre 100 kV/m près des pointes conductrices. La lumière solaire qui nous arrive sur Terre est une **onde électromagnétique** : le champ électrique de l'onde est de l'ordre de (en valeur efficace) 1000 V/m. Dans l'atome, la cohésion est assurée grâce à des champs électriques énormes, de l'ordre de 100 GV/m.

Topographie - Symétrie

Décrivons différentes situations pour dégager quelques propriétés du champ électrique. Tout d'abord, la représentation d'un champ vectoriel fait généralement appel à la notion de *ligne de champ*.

Ligne de champ

Pour représenter un champ vectoriel $\vec{A}(x, y, z)$, on trace des courbes orientées \mathcal{C} telles que leur tangente, en chaque point $M(x, y, z)$, ait la même direction et le même sens que le champ vectoriel en ce point. Ces courbes sont des lignes de champ.

D'un point de vue mathématique, si l'on note $d\vec{\ell} = (dx, dy, dz)$, le vecteur déplacement infinitésimal le long de la ligne de champ \mathcal{C} , on a

$$d\vec{\ell} \wedge \vec{A}(M) = \vec{0} \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{C}$$

Champ créé par une charge ponctuelle – Plaçons une charge ponctuelle q à l'origine d'un repère et calculons le champ électrique créé en un point M de l'espace situé à la distance r de l'origine. On obtient

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} = \frac{q\vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

où \vec{u}_r désigne le vecteur unitaire radial du système de coordonnées sphériques.

On peut voir ci-contre la carte du champ électrique créé par une telle charge ponctuelle. Notez que les vecteurs sont normalisés de sorte qu'ils indiquent seulement la direction et le sens du champ électrique. On a ajouté quelques lignes de champ. On observe que le champ est radial et centrifuge si la charge est positive. Evidemment, si l'on inverse le signe de la charge, les lignes de champ sont radiales et orientées vers la charge.

5 : Ce champ diverge lorsque $M = P_i$. Cette divergence provient d'une modélisation qui n'est plus valide dès que l'on s'approche de trop près des charges : la charge ponctuelle n'existe pas en réalité, il faut reconsidérer la modélisation dans ce cas.

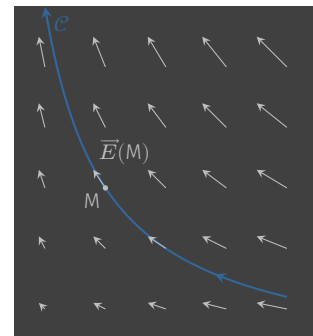


FIG. 1.6 : Ligne de champ \mathcal{C}

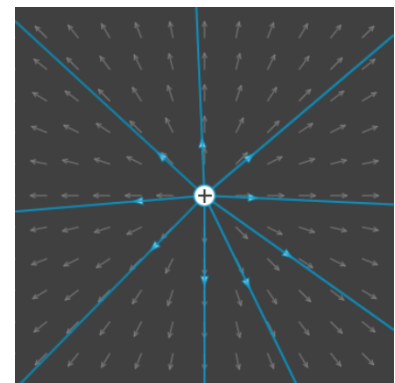


FIG. 1.7 : Carte de champ d'une charge ponctuelle positive.

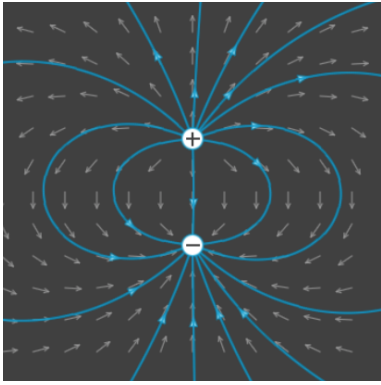


FIG. 1.8 : Carte de champ d'un doublet

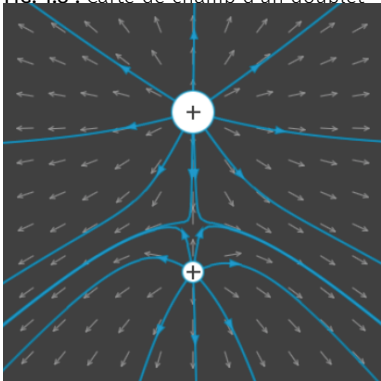


FIG. 1.9 : Carte de champ d'un système de 2 charges positives.

Champ créé par un doublet – Considérons deux charges ponctuelles de signe opposé, q et $-q$. Ce système forme ce que l'on appelle un doublet électrostatique. Regardons la carte de champ correspondante.

On peut voir que les lignes de champ partent de la charge positive pour converger vers la charge négative sans jamais se refermer. Par ailleurs, la distribution présente un plan de symétrie (plan miroir, vertical ici). On constate que pour tout point M de ce plan, $\vec{E}(M)$ est dans ce plan. La distribution présente également un plan d'antisymétrie (plan horizontal équidistant des deux charges) qui échange le signe des charges après une opération miroir. On peut noter que pour tout point M de ce plan, $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à ce plan.

Champ créé par deux charges de même signe – Considérons deux charges de même signe et de valeur différente situées sur un axe horizontal.

On peut faire les mêmes remarques que précédemment. Les lignes de champ partent des charges positives. Là encore, les lignes de champ, ne se referment pas sur elles mêmes. En terme de symétrie, la distribution de charges présente un plan de symétrie vertical et, comme précédemment, pour tout point M de ce plan, $\vec{E}(M)$ est dans ce plan. En revanche, la distribution ne présente pas de plan d'antisymétrie. Enfin, il existe un point où le champ est nul situé entre les deux charges. Ce point est un *point singulier*.

Symétries – Les exemples précédents mettent en évidence quelques propriétés de symétrie très générales.

Supposons qu'une distribution présente un plan de symétrie \mathcal{P} , c'est-à-dire que la distribution de charge est *invariante par rapport à une réflexion de plan \mathcal{P}* . On montre alors que le plan se comporte également comme un miroir vis-à-vis du champ électrique. Autrement dit, si l'on note M' l'image de M par une symétrie de plan \mathcal{P} , on a

$$\vec{E}(M') = \text{sym}(\vec{E}(M))$$

Intéressons nous aux points situés dans le plan de symétrie. On voit alors qu'à tout point P de la distribution, créant un champ $\overline{dE}(M)$, correspond un point symétrique P' créant un champ $\overline{dE}'(M)$ telle que $\overline{dE}(M) + \overline{dE}'(M)$ se trouve dans le plan \mathcal{P} . Ainsi le champ résultant $\vec{E}(M)$ est nécessairement dans le plan \mathcal{P} . Une conséquence immédiate est que le champ électrique est nécessairement nul au centre de symétrie d'une distribution.

Supposons maintenant que la distribution change de signe par rapport à un plan \mathcal{P}' . On dit alors que \mathcal{P}' est un plan anti-symétrique. Cette symétrie se retrouve également dans le champ électrique : si l'on note M' l'image de M par une symétrie de plan \mathcal{P}' , on a

$$\vec{E}(M') = -\text{sym}\vec{E}(M)$$

Cherchons le champ créé en un point $M \in \mathcal{P}'$. On voit alors qu'à tout point P de la distribution, créant un champ $\overline{dE}(M)$, correspond un point symétrique P' créant un champ $\overline{dE}'(M)$ telle que $\overline{dE}(M) + \overline{dE}'(M)$ est perpendiculaire au plan \mathcal{P}' . Ainsi le champ résultant $\vec{E}(M)$ est nécessairement perpendiculaire au plan \mathcal{P}' .

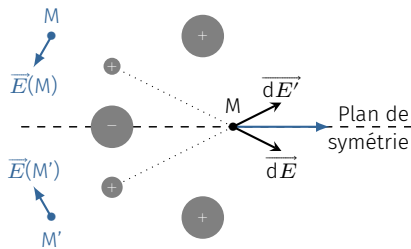


FIG. 1.10 : Distribution présentant un plan de symétrie.

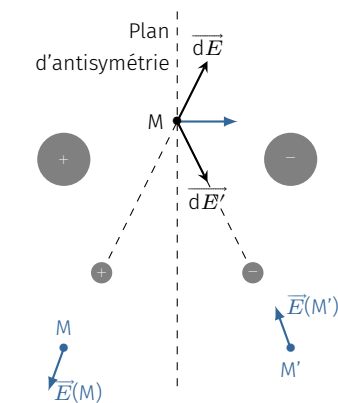


FIG. 1.11 : Distribution présentant un plan d'anti-symétrie.

À savoir

- ▶ En tout point d'un plan de symétrie, le champ électrique est contenu dans ce plan.
- ▶ En tout point d'un plan d'anti-symétrie, le champ électrique est perpendiculaire à ce plan.
- ▶ De manière plus générale, lorsque que certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétries des causes doivent se retrouver dans les effets produits (Principe de Curie). Ici, les causes sont représentées par la distribution de charges et les effets par le champ électrostatique.

Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

Fonction de répartition – On sait que toute distribution de charges est rigoureusement discontinue puisque tout transfert de charge ne se fait que par multiple entier de e . Cependant, à l'échelle macroscopique, un corps électrisé par frottement acquiert facilement une quantité de charge de l'ordre de

$$q = Ne \simeq \text{qqes nC} \quad \text{soit} \quad N \simeq 10^{10} \gg 1$$

Le nombre de particules est si grand que l'aspect discontinue passe inaperçu. On peut alors décrire la distribution de charges comme une *répartition continue de charges* et définir une fonction de répartition.

La **densité volumique de charge** $\rho_e(M)$ décrit la répartition en volume d'une quantité de charge. En un point M contenu dans un volume infinitésimal $d\tau$, la quantité de charge s'écrit

$$dq = \rho_e(M) d\tau \quad \heartsuit \quad (1.3)$$

où $\rho_e(M)$ s'exprime en C.m^{-3} . Si le milieu est homogène $\rho_e = q_{\text{total}}/V = \text{C}^{\text{te}}$.

La **densité surfacique de charge** $\sigma_e(M)$ décrit une répartition en surface d'une quantité de charge. En un point M contenu dans un élément d'aire infinitésimal dS , la quantité de charge s'écrit

$$dq = \sigma_e(M) dS \quad \heartsuit \quad (1.4)$$

où $\sigma_e(M)$ s'exprime en C.m^{-2} . Si le milieu est homogène $\sigma_e = q_{\text{total}}/S = \text{C}^{\text{te}}$.

Enfin, la **densité linéique de charge** caractérise la répartition de la charge le long d'un fil chargé. Pour un élément de longueur infinitésimal $d\ell$ situé en M, la quantité de charge s'écrit

$$dq = \lambda(M) d\ell \quad \heartsuit \quad (1.5)$$

où $\lambda(M)$ s'exprime en C.m^{-1} . Le passage du discret au continu pour

Les densités de charge introduites sont des grandeurs considérées locales à notre échelle, mais sont en réalité le résultat d'une moyenne effectuée à une échelle intermédiaire entre l'échelle atomique (ou la densité de charge varie de façon extrêmement brutale et erratique) et l'échelle macroscopique. Ainsi, l'intégrale (1.6) représente un champ local moyenné qui a, certes, le bon goût de varier continuellement, mais qui n'a plus de sens à l'échelle atomique.

le calcul du champ électrostatique transforme la somme en une intégrale :

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2} \quad \heartsuit \quad (1.6)$$

où \mathcal{D} représente le domaine d'intégration (volume, surface, ligne). Suivant le type de problème, on remplacera dq par $\rho_e d\tau$ ou $\sigma_e dS$ ou $\lambda d\ell$. Le calcul de cette intégrale est en général grandement simplifié si la distribution présente des symétries. C'est pourquoi, avant tout calcul direct, il est conseillé de faire une première analyse des propriétés de symétrie.

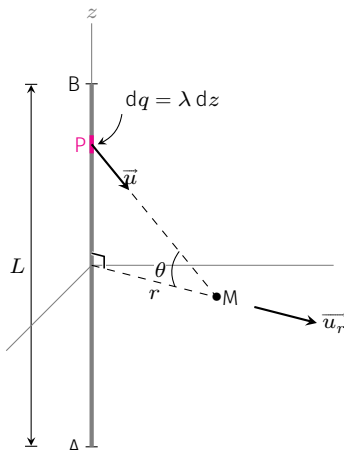


FIG. 1.12 : Calcul du champ créé par un segment chargé

Exemple – Champ créé dans le plan médiateur d'un segment chargé

On considère un segment AB de longueur L , contenant une charge Q uniformément répartie le long du segment. On cherche à calculer le champ électrique créé dans un plan médiateur du segment à la distance r . Ici la densité de charge est constante : $\lambda = Q/L$. Le plan médiateur est un plan de symétrie et le plan contenant le fil également de sorte que le champ est radial dirigé suivant le vecteur polaire \vec{u}_r . Par ailleurs, par symétrie de révolution, le champ ne dépend que de r . Nous avons donc

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = E_r \vec{u}_r$$

Il suffit donc de calculer la composante radiale du champ :

$$E_r = \vec{E} \cdot \vec{u}_r = \int \frac{dq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 PM^2} = \int_{AB} \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 PM^2} dz$$

Attention à ne pas écrire $E = \int dE$ car la somme d'une norme n'est pas égale, en général, à la norme de la somme. Les variables PM , z et θ étant liées, il faut choisir une variable d'intégration. L'angle θ est un bon choix. À l'aide des relations $PM = r / \cos \theta$ et $z = r \tan \theta$ (et donc $dz = r d\theta / \cos^2 \theta$), on a

$$E_r = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} 2 \sin \theta_0 \quad \text{avec} \quad \sin \theta_0 = \frac{L}{2\sqrt{r^2 + (L/2)^2}}$$

on peut finalement écrire le champ électrique :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{Q}{\sqrt{r^2 + (L/2)^2}} \vec{u}_r$$

Remarquons que pour $r \rightarrow \infty$ on retrouve $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ce qui est cohérent avec le fait qu'à grande distance le segment est assimilable à une charge ponctuelle.

La force électrostatique présente les mêmes propriétés que la force gravitationnelle, à savoir qu'elle est conservative ce qui permet d'introduire tout naturellement les notions d'énergie et de potentiel électrostatique. La connaissance du potentiel suffit alors à décrire complètement les effets électriques.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/potentiel-electrostatique.php>

2.1 Potentiel électrostatique	9
Énergie d'interaction . . .	9
Potentiel électrostatique	10
Topographie	11
Tension électrique	12
2.2 L'énergie électrostatique .	13
Énergie d'une charge . . .	13
Énergie d'un système chargé	14

2.1 Potentiel électrostatique

Énergie d'interaction entre deux charges ponctuelles

Pour introduire la notion de potentiel électrostatique, intéressons nous à l'interaction entre deux charges électriques q et q' . Supposons la première charge fixe et l'autre se déplaçant entre deux points A et B suivant un parcours \mathcal{C} quelconque.

En vertu de la loi de Coulomb, la charge q' subit au cours de son mouvement une force

$$\vec{f} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

où \vec{u}_r est le vecteur unitaire dirigé de la charge q vers la charge q' . Cette force produit un travail mécanique

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$$

Le déplacement présente une composante parallèle à \vec{u}_r et une composante perpendiculaire : $d\vec{\ell} = d\vec{\ell}_{\perp} + d\vec{\ell}_{\parallel}$. La composante parallèle, la seule qui nous intéresse pour le calcul du travail, correspond au déplacement radial $d\vec{\ell}_{\parallel} = dr \vec{u}_r$ de sorte que le travail s'écrit

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\mathcal{C}} \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

On constate que le travail ne dépend pas du trajet emprunté par la particule entre A et B : **la force électrique est une force conservative**. On peut donc définir une énergie potentielle électrique \mathcal{E}_p . Or, on sait¹ que

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B)$$

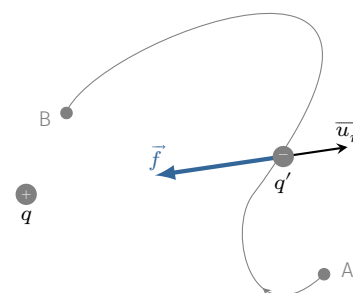


FIG. 2.1 : Travail de la force électrostatique.

1 : cf. cours de mécanique

ce qui donne, à une constante près (sans signification physique)

$$\mathcal{E}_p = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \heartsuit \quad (2.1)$$

Finalement, en voyageant dans l'espace, la particule « puise une énergie potentielle dans le champ électrique ».

Potentiel électrostatique

Poursuivons notre raisonnement en faisant intervenir le champ électrique. On peut dire que la charge q' se déplace dans un champ électrique \vec{E} créé par q ce qui produit une force $\vec{f} = q'\vec{E}$. Cette force conservative est reliée à l'énergie potentielle *via* la relation $\vec{f} = -\text{grad}\mathcal{E}_p$, d'où l'on tire facilement

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$$

L'opérateur « gradient »

L'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$ est un opérateur *différentiel linéaire*. Il s'applique à une fonction scalaire de l'espace (champ scalaire) et retourne une fonction vectorielle de l'espace (champ vectoriel). Il se lit *gradient* ou *nabla* et se note :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla}f(x, y, z)$$

L'expression de l'opérateur gradient dépend du système de coordonnées. En coordonnées cartésiennes on retiendra la formule suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

On voit donc que le champ électrique créé par une charge ponctuelle **est le gradient d'une fonction**. Cette propriété se généralise. En effet, comme le champ électrique créé par une distribution de charges est la somme de tous les champs individuels et que l'opérateur gradient est linéaire, il est facile de montrer que le champ créé par une distribution de charges peut toujours s'écrire

$$\vec{E}(M) \stackrel{\text{def}}{=} -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) \quad \heartsuit \quad (2.2)$$

Cette relation définit la fonction $V(M)$ appelée le **potentiel électrostatique au point M**.

On vient de voir que le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle q s'écrit

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad [\text{charge ponctuelle}]$$

Il en découle, en vertu du principe de superposition, l'expression générale pour une distribution de charges $(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N)$:

$$V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad \heartsuit \quad (2.3)$$

Le passage discret \rightarrow continu s'obtient par l'intégrale

$$V(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \heartsuit \quad (2.4)$$

où $dq = \lambda d\ell$ ou σdS ou $\rho_e dV$ suivant le type de distribution.

Le potentiel s'exprime en **volt** (symbole : V), en hommage à Volta². Une analyse dimensionnelle montre que $[V] = [E] L$ de sorte que le champ électrique peut s'exprimer en $V \cdot m^{-1}$.

Finalement, on peut dire qu'un ensemble de charges électriques fixes produit un champ de potentiel $V(M)$ et que toute charge q « baignant » dans ce champ subit une force

$$\vec{f} = -q \overrightarrow{\text{grad}} V$$

La connaissance du potentiel $V(M)$ permet de connaître le champ électrique $\vec{E}(M)$ et vice versa.

La relation (2.2) implique que le potentiel est défini à une constante additive près, dont la valeur est arbitraire. En l'absence d'autres conventions, nous ferons le choix de la prendre égale à zéro.

Topographie

En général, le potentiel $V(M)$ dépend des trois coordonnées de l'espace mais, pour simplifier, nous allons supposer que le champ $V(M)$ ne dépend que de deux coordonnées, disons x et y . Cela revient finalement à étudier le potentiel dans un plan particulier. Il y a deux façons de représenter le champ scalaire $V(x, y)$:

1. On peut tracer l'ensemble des points $z = V(x, y)$ dans un repère cartésien et l'on obtient alors une surface donnant l'évolution du potentiel. En chaque point de cette surface, la plus grande pente donne accès au gradient du potentiel, c'est-à-dire au champ électrique. Plus exactement le champ électrique

$$\vec{E} = - \left(\begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{array} \right)$$

correspond à la plus grande pente dans le sens de la descente. Ainsi le champ électrique est nul pour les points (x, y) correspondant aux sommets, vallées ou col de la surface. On comprend aussi pourquoi les lignes de champ ne se referment pas : en effet, si l'on suit un chemin qui ne cesse de descendre, on ne pourra jamais revenir au point de départ.

Il faut noter cependant que le passage discret \rightarrow continu introduit des difficultés mathématiques. Par exemple, l'intégrale citée diverge pour un segment infini uniformément chargé. Cette divergence est levée dès que la taille du système devient finie ce qui montre qu'elle est liée à une modélisation non physique.

2 : **Alessandro Volta (1745 -1827)** : physicien italien et inventeur de la première pile en 1800.

2. À l’instar des cartes topographiques, on préfère souvent représenter des **équipotentiels**, c’est-à-dire des courbes de niveau correspondant à une unique valeur de potentiel.

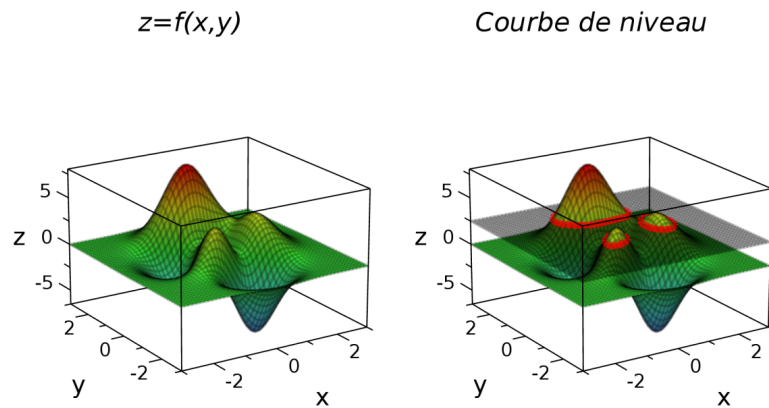


FIG. 2.2 : Représentations d’un champ scalaire.

Si le potentiel ne dépend que de deux coordonnées, l’équipotentielle $V(x, y) = C^{te}$ est **une courbe**. En revanche, si le potentiel dépend de trois coordonnées, l’équipotentielle $V(x, y, z) = C^{te}$ correspond à **une surface**.

Relation entre lignes de champ électrique et équipotentiels – Considérons un point M se déplaçant le long d’une équipotentielle particulière. Le potentiel conservant une valeur constante, on a $dV = 0$. Or, on peut écrire

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Ainsi, le long d’une équipotentielle, on a $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ ce qui signifie que si l’on se déplace le long d’une équipotentielle, on croise toujours le champ électrique avec un angle droit. Autrement dit, **les lignes de champ électriques sont perpendiculaires aux équipotentiels**.

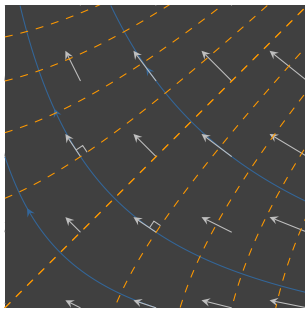


FIG. 2.3 : Les équipotentiels (en pointillées) coupent les lignes de champ (en bleu) à angle droit.

En conséquence, si la distribution de charges présente un plan d’antisymétrie, celui-ci est nécessairement une surface équipotentielle puisque le champ y est perpendiculaire.

Notion de tension électrique

Par définition, la tension électrique est une différence de potentiel électrique ou *d.d.p.* entre deux points. On notera U_{AB} la *d.d.p.* entre A et B :

$$U_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} V(A) - V(B) \quad \heartsuit \quad (2.5)$$

La tension, comme le potentiel électrique, s’exprime en volt. Notez que si le potentiel présente une indétermination, la tension est par

Électronique	Piles	Électrotechnique (moteurs, centrales)
$\mu\text{ V} - \text{V}$	1-10 V	100 V - 400 kV

TAB. 2.1 : Ordres de grandeur

contre bien déterminée ce qui en fait une grandeur mesurable indépendante du choix arbitraire de l'origine des potentiels.

La connaissance du champ électrique en tout point d'une région de l'espace permet de calculer la tension entre deux points de cette région par un calcul intégral :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B) = U_{AB} \quad \heartsuit \quad (2.6)$$

En conséquence, si le champ électrique possède une norme constante E le long d'une ligne de champ, la tension existante entre deux points de cette ligne de champ distants de d vaut $U = Ed$.

2.2 L'énergie électrostatique

Nous distinguerons deux cas de figure.

1. Soit une charge électrique est plongée dans un champ électrique créé par un système électrique extérieur. On dira que la charge est en interaction avec un champ électrique extérieur et on montrera que l'on peut définir une énergie potentielle électrique.
2. Soit N charges sont en interaction mutuelle. On montrera que ce système de charges possède une énergie potentielle interne.

Énergie potentielle d'une charge dans un champ extérieur

La force électrostatique que subit une charge q plongée dans un champ extérieur \vec{E}_{ext} vaut $\vec{F} = q\vec{E}_{\text{ext}}$. En vertu de la définition du potentiel électrique, on a

$$\vec{E}_{\text{ext}} = -\overrightarrow{\text{grad}}V_{\text{ext}}$$

où V_{ext} désigne le potentiel électrique. On peut aussi écrire

$$\vec{F} = q\vec{E}_{\text{ext}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_p = qV_{\text{ext}} \quad \heartsuit \quad (2.7)$$

où \mathcal{E}_p désigne l'**énergie potentielle électrostatique**. Cette énergie s'exprime en joule et n'est pas à confondre avec le potentiel électrostatique.

L'électron-volt

Une charge électrique q soumise à un champ électrique voit donc son énergie cinétique varier suivant la relation (conservation de l'énergie) :

$$\mathcal{E}_{cA} + qV_A = \mathcal{E}_{cB} + qV_B \Rightarrow \mathcal{E}_{cB} = \mathcal{E}_{cA} + qU_{AB}$$

Autrement dit, le gain d'énergie ne dépend que de la tension électrique entre la position initiale et la position finale :

$$\Delta\mathcal{E}_c = qU_{AB}$$

Lorsque $q = e$ et $U_{AB} = 1$ V, le gain d'énergie vaut, *par définition*, 1 électron-volt. Ainsi,

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

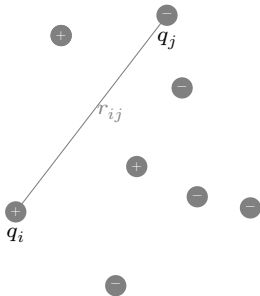


FIG. 2.4 : Distribution de N charges ponctuelles.

Énergie d'interaction d'un système de charges

Considérons une distribution stationnaire de N charges électriques $\{q_{i=1,\dots,N}\}$ situées en P_i . On note r_{ij} la distance qui sépare les charges q_i et q_j . Par définition, l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_{p,\text{int}}$ d'un tel système représente le travail qu'un opérateur doit fournir pour amener, de façon quasi-statique et depuis l'infini, les charges dans leur position finale. Puisque la force électrique est conservative, l'énergie que l'on doit dépenser ne dépend pas de la manière dont on s'y prend pour constituer le système.

Commençons donc par placer la charge q_1 en P_1 , ce qui ne nous coûte aucun travail. Ensuite amenons depuis l'infini la charge q_2 en P_2 . Lors de cette opération, la force électrique qui agit sur q_2 produit un travail

$$W = -\Delta\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p|_{\text{initial}} - \mathcal{E}_p|_{\text{final}} = q_2 (V_{\text{initial}} - V_{\text{final}})$$

Ici, le potentiel électrique auquel est soumise la charge q_2 vaut

$$V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + C^{\text{te}} \quad \text{d'où} \quad W = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Ce que l'on cherche n'est pas le travail de la force électrique mais le travail qu'il faut fournir pour s'opposer à celle-ci. Si le déplacement se fait de manière quasi-statique, on doit fournir un travail opposé à W . Pour un système de 2 charges, on trouve donc

$$\mathcal{E}_{p,\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Ajoutons maintenant une troisième charge q_3 . Cette opération nous coûte une énergie supplémentaire

$$q_3 (V_{\text{final}} - V_{\text{initial}}) = q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right)$$

de sorte que l'énergie d'un système de trois charges vaut

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

On trouve ainsi autant de termes $q_i q_j / (4\pi\epsilon_0 r_{ij})$ que de couples en interaction, ce qui se généralise sans difficulté : l'énergie d'interaction d'un système³ constitué par N charges ponctuelles vaut

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \sum_{\text{couples } (i,j)} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad \heartsuit \quad (2.8)$$

3 : On parle aussi d'énergie de mutuelle interaction.

On peut aussi reformuler en faisant intervenir le potentiel que subit la charge q_i , à savoir :

$$V_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p \text{ int}} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (2.9) \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = \sum_{i,j < i} u_{ij} + \sum_{i,j > i} u_{ij}$$

ce qui donne lorsque $u_{ij} = u_{ji}$

$$\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = 2 \sum_{i,j < i} u_{ij}$$

Notez que cette énergie ne dépend que des positions relatives des charges les unes par rapport aux autres. En effet, l'expression (2.8) est invariante par translation et/ou rotation du système de charges. De ce fait cette énergie est liée à la configuration de l'ensemble; il caractérise donc le système et on ne peut imputer une partie de l'énergie à une charge particulière.

Exercice – Calculer l'énergie potentielle électrostatique d'un système constitué de $N \gg 1$ charges q disposées de façon alternative avec N charges $-q$ le long d'une ligne; l'espacement entre deux voisins étant constant et fixé à a .



On donne $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \ln 2$

Rép. $\mathcal{E}_{p \text{ int}} = -\frac{2N \ln 2 q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$

La valeur négative d'une telle énergie, comme dans l'exercice précédent, signifie simplement qu'il faut fournir de l'énergie pour séparer les charges et les emmener à l'infini.

Les faits montrent que des corps neutres peuvent malgré tout interagir via des forces de nature électriques, dite dipolaires. Ce cours aborde ces aspects qui jouent un rôle important dans la modélisation des interactions moléculaires ainsi que dans le phénomène de polarisation de la matière en général.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/dipole-electrique.php>

- 3.1 L'approximation dipolaire 17
 - Le doublet électrostatique 17
 - Généralisation 18
 - Moment dipolaire 19
 - Champ électrique dipolaire 21
- 3.2 Interactions dipolaires . . 22
 - Énergie d'un dipôle 22
 - Action d'un champ uni-
forme 23
 - Force dipolaire 24
 - Interactions de van der
Waals 24

3.1 L'approximation dipolaire

Potentiel créé par un doublet électrostatique

On appelle doublet électrostatique, un ensemble de deux charges ponctuelles opposées $+q$ et $-q$ séparées d'une distance a . Sur la figure ci-contre, on note que l'axe AB est un axe de révolution. De plus, le plan contenant le doublet et le point M, est un plan de symétrie de la distribution. Par conséquent,

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta) \vec{u}_\theta$$

Si l'on note $r_1 = AM$ et $r_2 = BM$, le potentiel créé par ce doublet en un point M s'écrit

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Notons que l'équipotentielle $V = 0$ est l'ensemble des points telles que $r_1 = r_2$ ce qui correspond au plan médiateur du segment [AB], lequel représente également un plan d'antisymétrie de la distribution.

Cherchons maintenant à calculer le potentiel loin du doublet; c'est-à-dire à une distance $r \gg a$. Calculons le terme prépondérant du potentiel à l'aide d'un développement limité. On a (théorème de Pythagore généralisé)

$$r_1^2 = \|\vec{AO} + \vec{OM}\|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 - ar \cos \theta$$

D'où

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{2r}\right)^2 - \frac{a \cos \theta}{r} \right]^{-1/2}$$

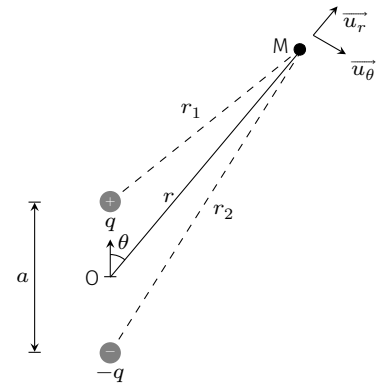


FIG. 3.1 : Doublet électrostatique

Si on se contente d'une approximation à l'ordre 1 en a/r , on trouve

$$\frac{1}{r_1} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a \cos \theta}{2r} \right)$$

De même pour $1/r_2$ ($\theta \rightarrow \pi - \theta$):

$$\frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a \cos \theta}{2r} \right)$$

Finalement, loin du dipôle, on peut approcher le potentiel par

$$V \simeq \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour } r \gg a$$

Cela constitue l'*approximation dipolaire*. On remarque que le potentiel décroît à grande distance comme $1/r^2$. En effet, loin du doublet, on « voit » une charge totale nulle ce qui explique que les effets électriques diminuent plus vite que ceux d'une charge ponctuelle.

Moment dipolaire électrique – On note également que le potentiel dépend du produit qa qui représente le *moment dipolaire électrique* du doublet. On définit le moment dipolaire \vec{p} du doublet par

$$\vec{p} = q\vec{BA} \quad \heartsuit \quad (3.1)$$

orienté de la charge négative vers la charge positive. Ce moment s'exprime en C.m. On peut alors exprimer le potentiel dans l'approximation dipolaire à l'aide du moment dipolaire :

$$V_{\text{dipolaire}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \heartsuit \quad (3.2)$$

Généralisation

Généralisons le résultat précédent en considérant une distribution localisée de charges. On suppose qu'un ensemble de N charges (q_1, \dots, q_N) occupe un volume fini. Nous noterons a , la *dimension caractéristique* de cette distribution. Cette distribution peut par exemple modéliser une molécule, un ion complexe, un métal chargé etc. On cherche à calculer les effets électriques (potentiel et champ électrique) dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire pour des points M situés à une distance grande devant a .

Plaçons l'origine O d'un repère dans la distribution puis adoptons les notations suivantes :

- ▶ $r = OM$, la distance entre O et M ;
- ▶ $r_i = P_iM$ où P_i repère la position de la charge q_i ;
- ▶ $a_i = OP_i$, la distance entre O et P_i .

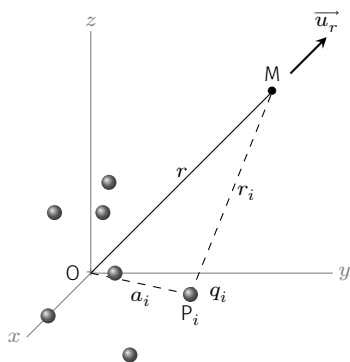


FIG. 3.2 : Distribution de N charges ponctuelles.

Le potentiel électrostatique créé en M par la distribution de charges s'écrit

$$V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

avec

$$r_i = \|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP_i}\| = r \sqrt{1 + \left(\frac{a_i}{r}\right)^2 - 2 \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP_i}}{r^2}}$$

Puisque $a_i/r \ll 1$, effectuons un développement limité du potentiel à l'ordre 2 en a_i/r à l'aide de la relation $(1 + \epsilon)^{-1/2} = 1 - 1/2\epsilon + 3/8\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$:

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 + \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP_i}}{r^2} + \frac{3(\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{u_r})^2 - OP_i^2}{2r^2} + o\left(\frac{a_i^2}{r^2}\right) \right]$$

Si l'on néglige les termes d'ordre supérieur à 2, on obtient l'approximation suivante :

$$V(M) \simeq \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{(\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}) \cdot \overrightarrow{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

On voit apparaître des termes décroissant en $1/r^n$. Les trois termes sont les premiers termes de ce que l'on appelle le *développement multipolaire* de $V(M)$:

1. Le premier terme désigne le *terme unipolaire*. C'est le terme prépondérant lorsque la charge totale est non nulle. Par exemple, un ion crée un champ quasi-newtonien dès que l'on se trouve à une distance grande devant sa taille¹.
2. Le deuxième terme représente le *terme dipolaire*. Il devient prépondérant lorsque la charge totale est nulle à condition que $\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} \neq \vec{0}$. C'est par exemple le cas d'une molécule neutre qui ne présente pas de centre de symétrie (on parle de molécule polaire), comme par exemple H_2O , HCl , etc.
3. Le troisième terme représente le *terme quadrupolaire*. Il décroît en $1/r^3$ et dépend du moment quadrupolaire $Q = \sum \frac{1}{2} q_i a_i^2 (3 \cos^2 \theta_i - 1)$ qui mesure l'écart à la symétrie sphérique.

1 : On montre que dans ce cas, si l'on place O au barycentre des charges, le deuxième terme disparaît et le terme suivant varie en $1/r^3$ (terme quadrupolaire).

À retenir

Pour une distribution électriquement neutre, on définit le moment dipolaire électrique

$$\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$$

Si ce moment dipolaire est non nul, le potentiel électrique s'écrit dans l'approximation dipolaire :

$$V_{\text{dipolaire}}(M) = \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Moment dipolaire électrique

La notion de dipôle trouve naturellement sa place dans la description de certaines molécules pour lesquelles le barycentre des charges positives ne coïncide plus avec le barycentre des charges négatives. En effet, supposons une distribution de charges électriquement neutre,

TAB. 3.1 : Entités chimiques et types d'actions électriques produits.

Entité chimique	H ₂ O	H ₂	HC	CO ₂	NH ₄ ⁺	He
Charge	0	0	0	0	≠ 0	0
Moment dipolaire	≠ 0	0	≠ 0	0	0	0
Moment quadrupolaire	≠ 0	≠ 0	≠ 0	≠ 0	≠ 0	0
Potentiel à longue distance	1/r ²	1/r ³	1/r ²	1/r ³	1/r	1/r ⁿ n ≥ 4

contenant N_+ charges positives $\{q_i^+\}$ et N_- charges négatives $\{q_i^-\}$. L'électroneutralité se traduit par la relation

$$N_+q_i^+ = -N_-q_i^- = Q$$

Cette neutralité électrique induit que le moment dipolaire ne dépend pas du choix de l'origine². En effet,

2 : Un théorème général stipule que le premier moment multipolaire non nul est indépendant du choix de l'origine ([2] p.181).

$$\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_i q_i \overrightarrow{OO'} + \sum_i q_i \overrightarrow{O'P_i} = \sum_i q_i \overrightarrow{O'P_i}$$

Notons maintenant B_+ le barycentre des charges positives et B_- celui des charges négatives. Par définition du barycentre, on a

$$Q \overrightarrow{OB_+} = \sum_{\text{charges } +} q_i^+ \overrightarrow{OP_i} \quad \text{et} \quad -Q \overrightarrow{OB_-} = \sum_{\text{charges } -} q_i^- \overrightarrow{OP_i}$$

Par conséquent

$$\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_{\text{charges } +} q_i^+ \overrightarrow{OP_i} + \sum_{\text{charges } -} q_i^- \overrightarrow{OP_i} = Q \overrightarrow{OB_+} - Q \overrightarrow{OB_-}$$

Ainsi, le moment dipolaire peut se réécrire

$$\vec{p} = Q \overrightarrow{B_- B_+} \quad \heartsuit \quad (3.3)$$

Le moment dipolaire est donc lié au fait que le barycentre des charges négatives ne coïncide pas avec le barycentre des charges positives. Quand une molécule présente cette propriété on dit qu'elle est polaire (H₂O, HCl, NO, etc.) alors que si elle présente un centre de symétrie on dit qu'elle est apolaire (He, N₂, O₂, CO₂, etc.). Le tableau ci-dessous recense quelques exemples d'entités chimiques et le type d'action qu'elles produisent.

Ordre de grandeur – Le moment dipolaire s'exprime en C.m dans le Système international d'unités mais les chimistes préfèrent une unité plus adaptée au monde moléculaire : le debye (symbole : D). Par définition

$$1 \text{ D} = 3,335\,64 \cdot 10^{-30} \text{ C.m} \simeq \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$$

Halogénure	Moment dipolaire
HF	1,97 D
HCl	1,03 D
HBr	0,78 D
HI	0,38 D

TAB. 3.2 : Moments dipolaires des halogénures d'hydrogène.

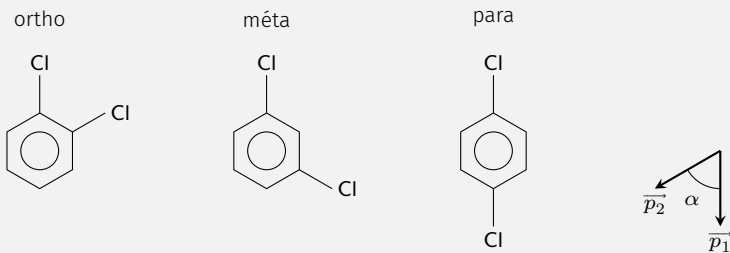
La TAB. 3.2 donne les moments dipolaires des halogénures d'hydrogène mettant en évidence le phénomène d'électronégativité : l'halogène déplace vers lui le barycentre des charges négatives ce qui induit un moment dipolaire dirigé vers H. Ce phénomène augmente de l'iode vers le fluor, élément le plus électronégatif du tableau périodique.

Il est pratique parfois de décomposer un système neutre en N sous-systèmes neutres auxquels on associe un moment dipolaire \vec{p}_i . Dans

ce cas, le moment dipolaire de la distribution complète est la somme vectorielle $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$. C'est pourquoi, on peut calculer le moment dipolaire d'une molécule en sommant vectoriellement les moments dipolaires associées à chaque liaison.

Exemple – Identification d'un isomère

L'un des isomères du dichlorobenzène a pour moment dipolaire $p = 1,5$ D. Sachant que la liaison C – Cl possède un moment $p_0 = 1,6$ D et que la liaison C – H est quasi apolaire, on peut déterminer cet isomère. En effet, le dichlorobenzène existe sous trois formes possibles :



Si l'on néglige le moment dipolaire des liaisons C – H, alors le moment dipolaire résulte de la somme vectorielle des moments dipolaires associées aux liaisons C – Cl. Si l'on note α l'angle entre ces liaisons, on a

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \Rightarrow \quad p = 2p_0 \cos(\alpha/2)$$

On en déduit $\alpha = 124^\circ$, valeur assez proche de 120° . Par conséquent, il s'agit de la forme méta-dichlorobenzène.

Champ électrique dans l'approximation dipolaire

Intéressons au champ électrique créé par une distribution électriquement neutre et présentant un moment dipolaire. Se plaçant dans l'approximation dipolaire, il suffit de calculer l'opposé du gradient³ du potentiel $V_{\text{dipolaire}}(M)$:

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right)$$

Utilisons l'identité $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\overrightarrow{\text{grad}}(g) + g\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ en prenant $g = \vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}$ et $f = 1/r^3$:

$$\vec{E}(M) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) + (\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right]$$

D'une part,

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\text{grad}}(p_x x + p_y y + p_z z) = \vec{p}$$

d'autre part,

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3\vec{u}_r}{r^4}$$

3 : D'un point de vue mathématique, la démarche n'est pas rigoureuse. Il faudrait, en principe, calculer directement le champ électrique puis faire tendre r vers l' ∞ : on obtient le même résultat.

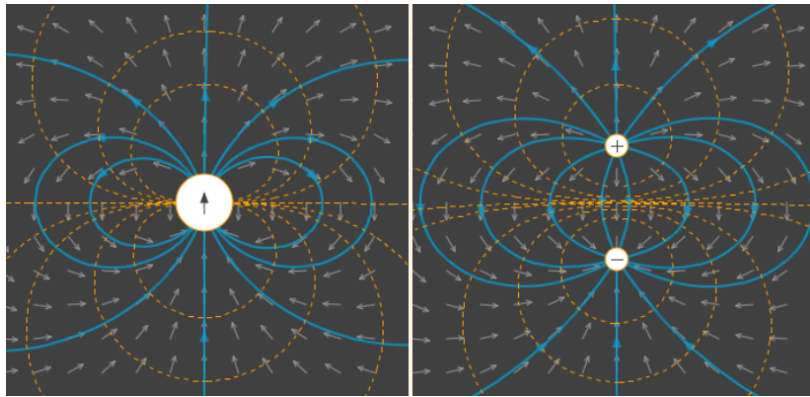


FIG. 3.3 : Lignes de champ (lignes continues) et équipotentielles (lignes discontinues) créées par un dipôle. À gauche, dans l'approximation dipolaire, à droite au voisinage de l'origine.

On obtient finalement

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2p \cos \theta \\ p \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

où la dernière expression est obtenue en orientant le moment dipolaire suivant l'axe (Oz) et en repérant le point M en coordonnées sphériques.

Notons que le champ électrique décroît en $1/r^3$ et qu'il n'est pas isotrope. La FIG. 3.3 représente les lignes de champs électriques et les équipotentielles, vues de loin et vues de près.

On serait tenté de conclure que, comme le laisse penser le schéma, les lignes de champ se referment à l'origine. Cependant au voisinage de l'origine, l'approximation dipolaire n'est plus valide. Un examen attentif de ce qui se passe près de l'origine montre que les lignes ne se referment pas : cette propriété est générale en électrostatique.

- ▶ On remarque que les lignes de champ présentent deux lobes symétriques perpendiculaires au moment dipolaire. On peut montrer que les lignes de champ ont pour équation paramétrique $r(\theta) = K' \sin^2 \theta$.
- ▶ Quant au potentiel électrique, la formule (3.2) permet de trouver l'équation paramétrique des équipotentielles : $r = K \sqrt{\cos \theta}$.

3.2 Interactions dipolaires

Énergie d'un dipôle dans un champ électrique extérieur

Supposons un dipôle électrique situé en O et plongeant dans le champ électrique \vec{E}_{ext} créé par une autre distribution de charges. Notons $V_{\text{ext}}(x, y, z)$ le potentiel associé. Insistons sur le fait que ces champs sont sans rapport avec les champs produits par le dipôle lui-même.

Cherchons à exprimer l'énergie du dipôle \mathcal{E}_p dans l'hypothèse où le champ extérieur varie peu à l'échelle du dipôle. Si l'on adopte un modèle de distribution discrète pour le dipôle, on a

Attention, il ne faut pas confondre cette énergie avec

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \sum_{\text{couples } (i,j)} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

qui représente l'énergie interne du dipôle, somme des énergie d'interactions mutuelles entre les charges du dipôle.

$$\mathcal{E}_p = \sum_i q_i V_{\text{ext}}(x_i, y_i, z_i)$$

où x_i, y_i et z_i sont les coordonnées du point P_i .

Compte tenu des hypothèses, contentons nous d'effectuer un développement du potentiel à l'ordre un, autour de O :

$$V_{\text{ext}}(x_i, y_i, z_i) \simeq V_{\text{ext}}(0, 0, 0) + x_i \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial x} + y_i \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial y} + z_i \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial z} = V_0 - \vec{E}_{\text{ext}} \cdot \overrightarrow{OP_i}$$

L'expression de l'énergie devient

$$\mathcal{E}_p = \sum_i q_i V_0 - \left(\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} \right) \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$$

En vertu de la neutralité électrique du dipôle et de la définition du moment dipolaire, on trouve

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}} \quad \heartsuit \quad (3.4)$$

Exercice – On considère une molécule A de taille caractéristique a de moment dipolaire \vec{p} en interaction avec un ion B assimilable à une charge ponctuelle q_0 située à la distance $AB \gg a$ de la molécule. On peut déterminer l'énergie de cette interaction en considérant que la charge est plongée dans le potentiel produit par la molécule, ou que la molécule est plongée dans le champ créé par la charge ponctuelle. Déterminer l'énergie d'interaction de ces deux manières, et vérifier la cohérence.

Rép. – Les deux approches donnent $\mathcal{E}_p = \frac{q_0 \vec{p} \cdot \overrightarrow{AB}}{4\pi\epsilon_0 AB^3}$.

Dipôle rigide dans un champ uniforme

Plongeons une molécule polaire dans un champ électrostatique extérieur *uniforme* \vec{E}_{ext} . On suppose que cette molécule conserve un moment dipolaire constant : on dit que le dipôle est rigide. Quelles sont les actions que subit le dipôle de la part du champ extérieur ?

Commençons par écrire l'énergie d'interaction :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}} = -p E_{\text{ext}} \cos \theta$$

Notons tout d'abord que l'énergie ne dépend pas de la position du dipôle. Cette invariance par translation se traduit par une résultante des forces nulles. On peut le vérifier en calculant directement la force électrique :

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_{\text{ext}} \sum_i q_i = \vec{0}$$

Ainsi la molécule n'est pas accélérée. En revanche, elle est soumise à un couple qui tend à la faire tourner. D'après le profil de l'énergie potentielle, on voit que le système va chercher à adopter la configuration la plus stable, c'est-à-dire celle correspondant à un alignement du dipôle avec le champ extérieur ($\theta = 0$). On peut calculer le moment de ce couple d'orientation :

$$\vec{\Gamma} = \sum_i \overrightarrow{OP_i} \wedge q_i \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}$$

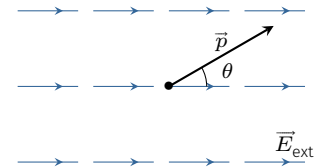


FIG. 3.4 : Dipôle rigide dans un champ uniforme.

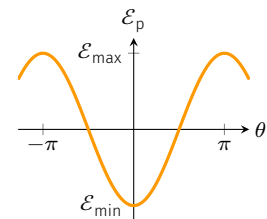


FIG. 3.5 : Profil énergétique

4 : Mathématiquement le couple est nul lorsque le dipôle est antiparallèle avec le champ électrique. Cependant, on peut voir sur le profil énergétique que cette configuration n'est pas stable : toute perturbation angulaire suffit à faire apparaître un couple qui tend à éloigner le dipôle de cette configuration.

moment qui tend à aligner le dipôle avec le champ électrique⁴. Ainsi, l'action d'un champ électrique uniforme consiste en une orientation du moment dipolaire suivant le champ électrique.

Exemple

Lorsque l'on dissout un ion en solution aqueuse, les molécules d'eau entourent l'ion en orientant le moment dipolaire de la molécule d'eau dans le sens du champ créé par l'ion. Ce processus permet d'atténuer efficacement le champ électrique créé par l'ion.

Dipôle rigide dans un champ non uniforme

Supposons maintenant que le champ ne soit plus uniforme et admettons que le processus d'orientation du moment dipolaire suivant le champ électrique soit réalisé à tout instant. Dans ce cas, l'énergie du dipôle s'écrit $\mathcal{E}_p = -pE_{\text{ext}}$. Les actions qui apparaissent font en sorte de diminuer cette énergie : autrement dit, le dipôle est soumis à une force qui tend à le déplacer dans la zone où règne le champ le plus fort. Mathématiquement, on a

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p = p \overrightarrow{\text{grad}}E_{\text{ext}}$$

Actions d'un champ non uniforme sur un dipôle

Un dipôle rigide dans un champ non uniforme est soumis à une force qui tend à le déplacer vers les zones où règne un champ électrique fort (une fois le dipôle aligné avec le champ).

C'est ce qui explique par exemple qu'un bâton d'ébonite frotté (et donc chargé) attire des morceaux de papier (isolants neutres). En effet, la tige d'ébonite crée un champ électrique qui polarise le morceau de papier, lequel acquiert un moment dipolaire forcément orienté avec le champ électrique. Ce champ étant plus intense près de l'extrémité du bâton, le morceau de papier va venir s'y coller.

Interactions de van der Waals

5 : Nommées ainsi en l'honneur du physicien néerlandais Johannes Diderik van der Waals (1837 – 1923), prix Nobel de physique 1910, qui fut le premier à introduire leurs effets dans les équations d'état des gaz en 1873.

Au sein de la matière, les molécules, bien qu'électriquement neutres, sont soumises à de faibles interactions attractives que l'on désigne par *interactions de van der Waals*⁵. Ces interactions jouent un rôle important dans la science du vivant, en chimie et en physique des interfaces. Elles sont par exemple responsables de la cohésion des cristaux liquides et moléculaires. Les phénomènes de tension de surface reposent également sur cette force. On peut interpréter l'interaction de van der Waals comme le résultat d'une interaction entre dipôles dont l'énergie d'interaction se décompose en trois termes :

$$\mathcal{E}_{\text{vdW}} = \mathcal{E}_{\text{Keesom}} + \mathcal{E}_{\text{Debye}} + \mathcal{E}_{\text{London}}$$

Terme de Keesom : deux molécules polaires de moment dipolaire p_1 et p_2 auront tendance à orienter leur moment dipolaire dans le sens du champ produit par l'autre dipôle puis à se rapprocher du fait de l'attraction vers les champs forts. Du fait de l'agitation thermique, il faut moyenner cette interaction sur toutes les orientations possibles. On montre alors que l'énergie d'interaction moyenne entre deux dipôles permanents distants de r s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{Keesom}} = -\frac{p_1^2 p_2^2}{k_B T (4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{r^6}$$

Terme de Debye : il s'agit de l'interaction d'une molécule polaire avec une molécule apolaire, comme par exemple l'interaction entre H_2O et O_2 . La molécule apolaire ne présente pas de moment dipolaire en raison de l'existence d'un centre de symétrie, cependant, en présence d'un champ électrique, le nuage électronique se déforme ce qui déplace le barycentre des charges négatives et induit l'apparition d'un moment dipolaire : on dit que la molécule s'est polarisée. Le moment dipolaire induit est proportionnel au champ électrique extérieur :

$$\vec{p}_{\text{induit}} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_{\text{ext}}$$

où α désigne la **polarisabilité**. Ainsi, en présence d'un dipôle permanent, une molécule apolaire se polarise et a tendance à s'orienter suivant le champ polarisant puis à se rapprocher de la molécule responsable de cette polarisation. On trouve une énergie d'interaction

$$\mathcal{E}_{\text{Debye}} = -\frac{p_1^2 \alpha}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^6}$$

Force de London : on pourrait penser que deux atomes apolaires (comme les gaz rares) ou deux molécules apolaires (comme O_2) n'interagissent pas puisqu'ils ne présentent pas de moment dipolaire. En réalité, chaque molécule présente un moment dipolaire fluctuant $p(t)$ de moyenne nulle : $\overline{p(t)} = \vec{0}$. Le terme d'interaction, proportionnel à la moyenne $\overline{p^2}$, n'est pas nulle. On montre que le terme d'interaction varie aussi comme $1/r^6$.

Forces de van der Waals

En résumé, dans la matière il existe des interactions attractives entre toutes les molécules. L'énergie d'interaction s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{vdW}} = -\frac{C}{r^6}$$

ce qui donne naissance à une force moyenne attractive

$$\vec{F}_{\text{VDW}} = -\frac{6C}{r^7} \vec{u}_r$$

La décroissance rapide de la force de van der Waals permet d'expliquer sa courte portée et son influence dans les milieux denses (liquide et solide).

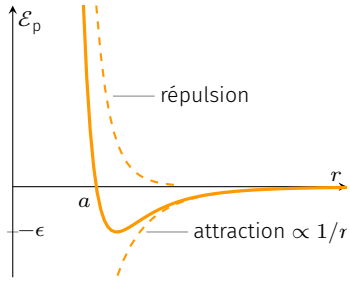


FIG. 3.6 : Potentiel de Lennard-Jones.

Bien entendu, les molécules finissent par se repousser lorsqu'elles sont en contact proche du fait de la répulsion électronique et du principe d'exclusion de Pauli. Cette effet stérique est en général décrit par un terme d'énergie répulsif en $1/r^{12}$. Un modèle très souvent utilisé en dynamique moléculaire pour sa simplicité, est le modèle de Lennard-Jones :

$$\mathcal{E}_p(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right]$$

où ϵ représente la profondeur du puits de potentiel et a la position correspondant à une énergie nulle (cf. FIG. 3.6). La profondeur du puits est de l'ordre du kJ/mol ce qui explique l'existence de cristaux moléculaires, à basse température.

La force de van der Waals entre deux atomes isolés a pu être mesurée directement pour la première fois par une équipe de physiciens français en 2013[3]. Cette prouesse a été rendue possible grâce aux technologies associées au refroidissement laser et au piégeage optique.

CONDUCTEURS ÉLECTRIQUES

4

Ce cours aborde les propriétés électriques des conducteurs, aussi bien à l'équilibre que hors équilibre (phénomène de conduction). Ce sera l'occasion d'introduire les notions de capacité d'un condensateur et de résistance d'un conducteur ohmique utiles en électricité.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/conducteurs-electriques.php>

4.1 Conduction électrique

Un conducteur est un système macroscopique qui contient des porteurs de charge libres, susceptibles de se mettre en mouvement sous l'action d'une force extérieure.

Conducteur	Porteurs de charge libres
Métal (Cu, Ag, Au, Al, ...)	Électrons libres délocalisés
Semi conducteur dopé (Si, AsGa, ...)	Paires électron - trou
Solution électrolytique (KOH _{aq} , NaCl _{aq} ,...)	Ions dissous
Plasma (gaz ionisé)	Protons, électrons

Courant électrique

Définition

Le courant électrique est le résultat d'un *déplacement d'ensemble* de particules chargées. Son intensité I est donnée par le flux (ou le débit) de charge qui traverse une section (S). Plus précisément, la quantité de charge dq qui passe au travers de (S) entre t et $t+dt$ vaut

$$dq = I(t) dt$$

L'intensité électrique s'exprime en **ampère** (symbole : A) en hommage à André-Marie Ampère. On a donc $1 \text{ A} = 1 \text{ C.s}^{-1}$

On peut exprimer l'intensité du courant électrique en fonction des caractéristiques de l'écoulement des porteurs de charge, à savoir leur vitesse moyenne et leur densité volumique. Pour simplifier la démonstration, supposons un seul type de porteurs se déplaçant tous à la vitesse moyenne v . Notons ρ_e leur densité volumique de charge (en C.m^{-3}). Considérons une section (S) orientée par la normale \vec{n} et calculons la quantité de charge la traversant pendant une durée dt .

Tous les porteurs de charge qui traversent l'élément infinitésimal dS de la section à l'instant $t + dt$, se trouvaient entre les instants t et

4.1 Conduction électrique . . .	27
Courant électrique	27
Loi d'Ohm locale	29
Modèle de Drude	29
Notion de résistance	30
4.2 Conducteur en équilibre . . .	31
Généralités	31
Théorème de Coulomb	32
Le théorème de Gauss	33
4.3 Notion de capacité	35
Capacité d'un conducteur	35
Les condensateurs	36
Condensateur plan	37
Énergie d'un condensateur	39

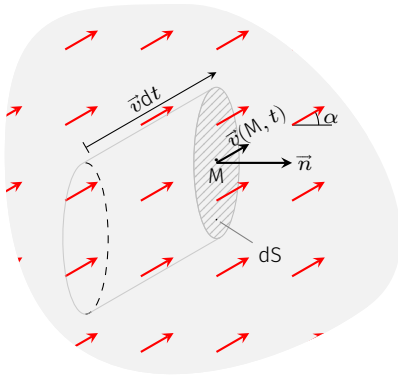


FIG. 4.1 : Calcul du débit de charge traversant une section.

$t + dt$ dans un cylindre de base dS et de génératrice $\vec{v} dt$, dont le volume s'écrit $d\tau = dS dt \vec{v} \cdot \vec{n}$. Ainsi, la quantité de charge d^2q qui traverse la section dS entre t et $t + dt$ vaut $d^2q = \rho_e d\tau$. En intégrant sur toute la section, on trouve

$$dq = dt \iint_{(S)} \rho_e \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Mathématiquement, l'intensité s'interprète donc comme le flux d'un vecteur $\vec{j}_e = \rho_e \vec{v}$ appelé **densité de courant électrique** :

$$\begin{aligned} I(t) &= \iint_{(S)} \vec{j}_e \cdot \vec{n} dS \\ [A] &= [A \cdot m^{-2}] \times [m^2] \end{aligned} \quad \heartsuit \quad (4.1)$$

Si le courant est réparti uniformément, le vecteur densité de courant est constant sur la section S et l'intégrale se réduit à :

$$I = \vec{j}_e \cdot \vec{n} S$$

Dans le cas où plusieurs porteurs de charge transportent le courant il faut sommer toutes les contributions :

$$\vec{j}_e = \sum_i \rho_{e,i} \vec{v}_i \quad \heartsuit \quad (4.2)$$

Arrêtons nous un instant sur les ordres de grandeur. Le TAB. 4.1 donne quelques valeurs d'intensité que l'on rencontre dans le quotidien. Es-

TAB. 4.1 : Quelques ordres de grandeur

Ordre de grandeur	Phénomène
1 mA	seuil de perception chez l'humain
75 mA	seuil de fibrillation cardiaque irréversible
1A	fonctionnement d'une lampe halogène
10 A	radiateur électrique en fonctionnement
1 kA	alimentation d'un moteur de locomotive
1-100 kA	courant de foudre

sayons d'estimer la vitesse des porteurs de charge dans une installation domestique. Par exemple, un fil de cuivre de section $s = 2,5 \text{ mm}^2$ supporte un courant d'intensité $I_{\max} = 20 \text{ A}$ (normes françaises). La densité de courant correspondante vaut

$$j_e = \frac{I_{\max}}{s} = 8.10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

Le cuivre a pour densité $d = 8,96$ et une masse atomique $m = 63,5 \text{ u.a.}$. De plus, chaque atome de cuivre libère un électron libre. Ainsi, 1 m^3 pèse $8,96 \cdot 10^3 \text{ kg}$ ce qui correspond à $8,96 \cdot 10^3 / 63,5 \cdot 10^{-3}$ mole de cuivre. La densité volumique des porteurs de charge vaut donc

$$\rho_e = \frac{8,96 \cdot 10^3}{63,5 \cdot 10^{-3}} \times 6,02 \cdot 10^{23} \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$$

la vitesse moyenne des électrons est alors donnée par $v = j_e / \rho_e = 0,6 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. La vitesse moyenne correspondant au transport de l'électricité est très faible devant la vitesse d'agitation thermique qui est de l'ordre de $10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On peut aussi noter que si le fil est traversé

par un courant alternatif de fréquence $f = 50$ Hz et d'intensité maximum 20 A, le déplacement moyen des électrons libres oscillera avec une amplitude

$$A = \frac{v}{2\pi f} = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{100 \times \pi} \simeq 2 \mu\text{m}$$

Loi d'Ohm locale

Un conducteur soumis à un champ électrique \vec{E} est le siège d'un courant électrique de densité de courant

$$\vec{j}_e = \gamma \vec{E} \quad \heartsuit \quad (4.3)$$

où γ désigne la **conductivité électrique** et s'exprime en siemens par mètre ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$). Elle dépend du conducteur, de la température et de la pression. Par exemple, dans les métaux, γ diminue quand la température augmente. Le TAB. 4.2 donne quelques valeurs de conductivités à 20°C. Notez le rapport d'échelle entre les isolants et les conducteurs.

Bons conducteurs		Mauvais conducteurs		Isolants	
Substance	γ ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$)	Substance	γ ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$)	Substance	γ ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$)
Argent	$6,1 \cdot 10^7$	Eau de mer	0,2	Huile minérale	$2 \cdot 10^{-11}$
Cuivre	$5,8 \cdot 10^7$	Silicium	$4,3 \cdot 10^{-4}$	Verre Pyrex	10^{-15}
Or	$4,5 \cdot 10^7$	Eau distillée	$2 \cdot 10^{-4}$	Quartz	$2 \cdot 10^{-17}$

TAB. 4.2 : Ordres de grandeur de conductivités électriques.

Modèle de Drude

En 1900, Paul Drude propose un modèle classique qui explique qualitativement la conduction électrique. Ce modèle repose sur les hypothèses suivantes.

1. Approximation des électrons libres : les électrons de conduction forment un *gaz parfait de particules chargées indépendantes* (malgré la présence des ions métalliques). En l'absence de champ extérieur, ces électrons libres ne ressentent aucune force en moyenne et se déplacent en ligne droite du fait de l'agitation thermique.
2. Les électrons sont diffusés par les défauts cristallins. Après chaque collision, la vitesse est redistribuée de façon aléatoire.
3. Le temps de libre parcours moyen ou temps de relaxation τ est la durée moyenne entre 2 collisions. τ est indépendant de la vitesse des électrons. Son ordre de grandeur est 10^{-14} s.

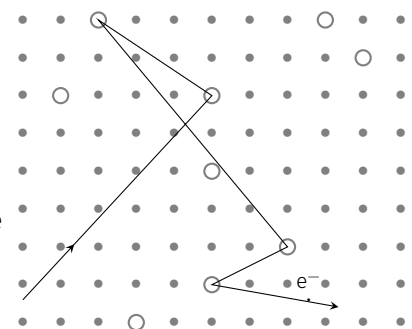


FIG. 4.2 : Modèle de Drude.

Dans ce modèle, entre deux collisions, la vitesse d'un électron soumis à un champ électrique extérieur \vec{E} , vérifie la seconde loi de Newton (modèle classique) :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \quad \text{soit} \quad \vec{v} = -\frac{e\vec{E}}{m_e} t + \vec{v}_0$$

où \vec{v}_0 désigne la vitesse après la dernière collision et t le temps compté à partir de la dernière collision. Le courant étant lié au mouvement d'ensemble, il faut effectuer une moyenne sur l'ensemble des électrons au même instant.

$$\vec{v}_{\text{moy}} = -\frac{e\vec{E}}{m_e} \langle t \rangle + \langle \vec{v}_0 \rangle$$

Or, la vitesse étant redistribuée dans toutes les directions après chaque collision, ceci de façon aléatoire, on a $\langle \vec{v}_0 \rangle = \vec{0}$. De plus, la moyenne $\langle t \rangle$ correspond à la moyenne des temps de collision c'est-à-dire τ . Finalement, on obtient une vitesse d'ensemble

$$\vec{v}_{\text{moy}} = -\frac{e\tau}{m_e} \vec{E}$$

La vitesse d'ensemble est proportionnelle au champ électrique. Le coefficient de proportionnalité s'appelle *la mobilité* μ :

$$\vec{v}_{\text{moy}} = \mu \vec{E}$$

Si l'on note n la densité d'électrons libres (en m^{-3}), on voit que le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique et s'écrit $\vec{j}_e = ne\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{ne^2\tau}{m_e} \vec{E}$. On retrouve donc la loi d'Ohm locale

$$\vec{j}_e = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{ne^2\tau}{m_e}$$

Ce modèle permet d'expliquer, par exemple, pourquoi la conductivité des métaux diminue quand la température augmente. En effet, lorsque l'on chauffe un métal, les vibrations du réseau s'amplifient ce qui augmente la probabilité qu'il y ait collision et donc diminue le temps de relaxation.

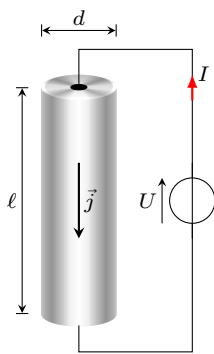


FIG. 4.3 : Cylindre conducteur.

Notion de résistance

Pour introduire la notion de résistance d'un conducteur, considérons un cylindre conducteur de longueur ℓ , de diamètre d et donc de section droite $s = \pi d^2/4$, soumis à une tension électrique U entre ses extrémités.

Faisons l'hypothèse que le courant électrique est uniforme sur la section et axial. La section étant constante, la densité de courant est constante le long du cylindre. De plus, la relation $j_e = \gamma E$ implique que le champ électrique est axial et constant le long du conducteur. L'intensité électrique vaut alors $I = j_e s = \gamma E s$ et la tension électrique entre les extrémités vaut $U = \int E d\ell = E\ell$. Le rapport des deux relations permet d'obtenir la loi d'Ohm pour un fil conducteur cylindrique :

$$U = RI \quad \text{avec} \quad R = \frac{1}{\gamma} \frac{\ell}{s} \quad \heartsuit \quad (4.4)$$

De manière générale, la loi $U = RI$ constitue la *loi d'Ohm intégrale* et R désigne la résistance du conducteur dont l'expression dépend

de la conductivité **et** de la géométrie. La résistance s'exprime en ohm (symbole Ω) en hommage à Georg Ohm.

Application – La thermistance

L'inverse de la conductivité d'un métal, appelée résistivité, varie linéairement avec la température ($1/\gamma = \rho_0 + \alpha T$) de telle sorte que la résistance peut servir de thermomètre une fois étalonné. Le fil de platine est couramment utilisé ainsi : on parle de thermomètre à résistance de Platine.

4.2 Conducteurs en équilibre électrostatique

On s'intéresse dorénavant à l'équilibre de conducteurs électrisés (chargés) placés dans le vide.

Propriétés des conducteurs en équilibre

À l'équilibre, un conducteur n'est soumis à aucun mouvement macroscopique. Notamment, il n'y a pas de courant électrique macroscopique. Par conséquent,

$$\vec{j}_e = \vec{0}$$

Bien évidemment, à l'échelle de l'atome les électrons sont en mouvement, mais à l'échelle mésoscopique¹ ces mouvements incessants se compensent en moyenne. Donc, selon la loi d'Ohm, il ne règne aucun champ électrique au sein du conducteur :

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0} \quad \heartsuit \quad (4.5)$$

Insistons sur le fait qu'il s'agit ici du champ électrique local moyenné à l'échelle mésoscopique. Bien entendu, à l'échelle de l'atome, règne un champ électrique extrêmement important et fluctuant.

À l'intérieur du conducteur, le potentiel doit vérifier $\vec{E}_{\text{int}} = -\vec{\text{grad}}V_{\text{int}} = \vec{0}$ soit

$$V_{\text{int}} = C^{\text{te}} \quad \heartsuit \quad (4.6)$$

Le potentiel électrique est uniforme au sein du conducteur à l'équilibre. Autrement dit, **le conducteur à l'équilibre est un volume équipotentiel**. Les lignes de champ électrique étant perpendiculaires aux équipotentielles, on voit ici que le champ électrique au voisinage extérieur du conducteur est normal à la surface.

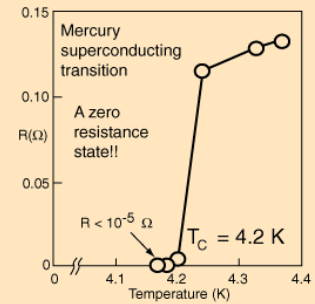
En vertu du théorème de Gauss, que nous verrons ultérieurement, le fait que le champ électrique soit nul à l'intérieur du conducteur implique que la densité de charge volumique est nulle partout.

$$\rho_{e,\text{int}} = 0 \quad \heartsuit \quad (4.7)$$

Cela signifie que tout apport de charge à un conducteur va se répartir à la surface de celle-ci de façon à créer un champ électrique nul à l'intérieur. On caractérise alors le conducteur par sa distribution

Supraconduction

En 1911, Kamerlingh Onnes (Prix Nobel 1913), découvre le phénomène de supraconduction sur le mercure : en dessous d'une certaine température, dite température critique et notée T_c , certains métaux perdent complètement leur résistivité[4].



La supraconduction ouvre des perspectives de transport de l'électricité sans perte d'énergie (voir effet joule en électricité) à condition de trouver un supraconducteur de température critique située dans le domaine de température ambiante.

Depuis 1911, ce phénomène fut découvert dans de nombreux métaux et alliages avec des records de température critique qui progressèrent doucement.

Un grand saut fut fait en 1986 avec la découverte d'une nouvelle famille de supraconducteurs : les cuprates, composés de couches d'oxyde de cuivre. Récemment, la barre des -100°C a été franchie puisqu'un matériau à base de sulfure d'hydrogène a conservé sa supraconductivité jusqu'à -73°C . Il reste donc encore du chemin à parcourir avant de trouver un matériau supraconducteur à température ambiante.

¹ : Échelle intermédiaire entre l'échelle atomique et macroscopique. Typiquement c'est l'échelle du micromètre.

de charge surfacique $\sigma_e(P)$ où P désigne un point de la surface du conducteur. Le champ électrique à la surface du conducteur dépend donc de la manière dont se répartissent les charges en surface.

Théorème de Coulomb

Plaçons nous à l'extérieur d'un conducteur à l'équilibre tout en restant dans le voisinage immédiat d'un point P de sa surface. Dans ce cas, le champ électrique produit ne dépend que de la densité surfacique en ce point. C'est ce qu'énonce le théorème de Coulomb.

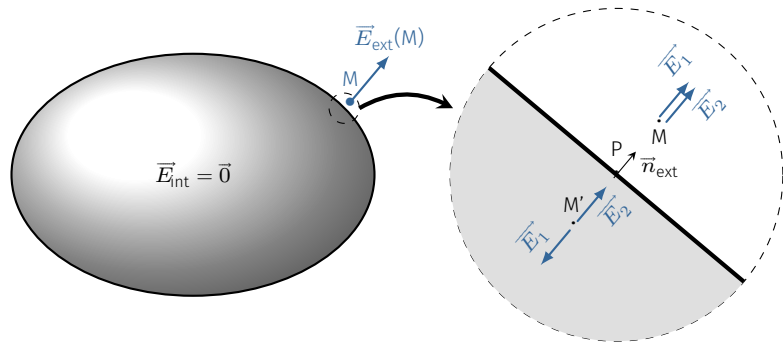


FIG. 4.4 : Champ au voisinage de la surface d'un conducteur.

Pour le montrer, plaçons-nous en un point M au voisinage d'un conducteur. On peut considérer que le champ créé en M est le résultat de deux contributions :

$$\vec{E}_{\text{ext}}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$$

où \vec{E}_1 est le champ créé par une portion de conducteur suffisamment petite pour qu'on puisse l'assimiler à un plan tangent, et \vec{E}_2 celui dû au reste du conducteur. On a vu qu'un plan infini uniformément chargé produit un champ électrique $\vec{E} = \sigma_e/2\epsilon_0 \vec{n}$ où \vec{n} est le vecteur normal au plan. Ce résultat reste valide pour un plan fini de taille caractéristique L tant que l'on se place à une distance $d \ll L$ du plan. Supposons donc M suffisamment proche du conducteur pour autoriser cette approximation puis notons \vec{n}_{ext} le vecteur unitaire normal à la surface du conducteur et dirigé vers l'extérieur. On a donc

$$\vec{E}_{\text{ext}}(M) = \frac{\sigma_e(P)}{2\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}} + \vec{E}_2(M)$$

Par ailleurs, si l'on considère le point M' symétrique de M par la symétrie plane passant par P, on a également

$$\vec{E}_{\text{int}}(M') = -\frac{\sigma_e(P)}{2\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}} + \vec{E}_2(M')$$

Nous savons qu'à l'intérieur du conducteur le champ électrique est nul ce qui implique $\vec{E}_2(M') = \sigma_e(P)/\epsilon_0 \vec{n}_{\text{ext}}$. Or, par continuité, $\vec{E}_2(M') = \vec{E}_2(M)$ puisque M et M' sont infiniment voisins². Finalement, on trouve $\vec{E}_{\text{ext}}(M) = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}}$.

2 : Pour être précis, on montre que le champ électrique est continu sauf si le trajet MM' coupe une distribution surfacique de charge, ce qui n'est pas le cas ici, car on s'intéresse au champ créé par la surface conductrice à laquelle on a retiré la portion contenant P.

Théorème de Coulomb

Dans un conducteur à l'équilibre, le champ électrique intérieur est nul, le potentiel électrique est uniforme et les charges se répartissent à la surface du conducteur. Il règne alors au voisinage immédiat de la surface chargée (et à l'extérieur) un champ électrique :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma_e(P)}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}}$$

Le théorème de Gauss et ses conséquences

Le théorème de Gauss est un théorème très général qui relie le flux électrique et la quantité de charge électrique.

Par définition, le flux du champ électrique \vec{E} à travers une surface fermée S vaut

$$\phi_E \stackrel{\text{def}}{=} \iint_S \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \, dS \quad \heartsuit \quad (4.8)$$

où \vec{n} désigne un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface en M et dirigé vers l'extérieur.

Pour introduire le théorème de Gauss, calculons le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle, à travers une sphère de rayon r centrée sur la charge. Le champ électrique en un point M de la surface sphérique vaut

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

où \vec{u}_r est le vecteur unitaire du système sphérique. La normale à la surface est également suivant \vec{u}_r de sorte que le flux s'écrit

$$\phi_E = \iint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r \, dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iint dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Autrement dit, le flux est proportionnel à la quantité de charge enfermée par la sphère mais ne dépend pas de la taille de la sphère. On peut se demander ce que devient le flux lorsque la surface qui enferme la charge n'est plus sphérique. On trouve un résultat surprenant puisque le flux reste identique : tant que la surface englobe la charge, $\phi_E = q/\epsilon_0$. En revanche, si la surface n'englobe pas la charge, on obtient toujours $\phi_E = 0$.

Si maintenant on envisage une distribution quelconque de charges et une surface fermée S englobant une partie des charges, seule la quantité de charge q_{int} intérieure à S contribue au flux : c'est le sens du théorème de Gauss.

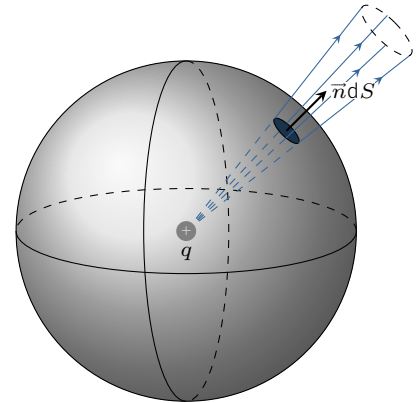


FIG. 4.5 : Calcul du flux du champ électrique que crée une charge ponctuelle à travers une sphère de rayon r .

Théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée quelconque, est proportionnel à la quantité de charge enfermée par cette surface. La constante de proportionnalité vaut, dans le Système International, $\frac{1}{\epsilon_0}$.

$$\phi_E = \iint_S \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \, dS = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (4.9)$$

On peut vérifier que le théorème de Gauss est bien compatible avec le théorème de Coulomb. Imaginons que la surface S englobe un conducteur quelconque de charge totale q de façon à ce qu'elle soit infiniment proche de la surface du conducteur. D'après le théorème de Coulomb, $E = \sigma_e(P)/\epsilon_0 \vec{n}$ de sorte que

$$\phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{P \in S} \sigma_e(P) \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ce qui est bien conforme au théorème de Gauss.

Voyons maintenant quelques conséquences du théorème de Gauss.

- ▶ Isolons par la pensée un petit volume V situé à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre. Le champ électrique y étant nul, son flux à travers la surface qui délimite V est également nul. Par conséquent, la charge intérieure au volume est nulle. Ainsi, on peut affirmer que tout volume (mésoscopique) contient une charge nulle, ce qui revient à dire que la densité volumique de charge est partout nulle, à l'intérieur d'un conducteur; ce qui démontre une des propriétés des conducteurs à l'équilibre.
- ▶ Considérons maintenant une sphère conductrice chargée (charge q) de rayon R . Par symétrie, la charge se répartie uniformément en surface d'où une densité surfacique constante $\sigma_e = q/(4\pi R^2)$. On connaît le champ électrique au voisinage de la sphère, mais que vaut-il à une distance r quelconque? Pour cela il suffit d'appliquer le théorème de Gauss en choisissant pour surface fermée S la sphère de rayon r et de même centre que le conducteur. On a

$$\phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S E \, dS$$

car \vec{E} est colinéaire à $\vec{n} = \vec{u}_r$ compte tenu de la symétrie sphérique. Par ailleurs, l'invariance par rotation implique que le champ ne dépend que de r . Ainsi, E est constant le long de la surface sphérique d'intégration. Il vient alors

$$\phi_E = \iint_S E \, dS = E \iint_S dS = E 4\pi r^2$$

Du théorème de Gauss, il découle donc

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{si } r > R$$

Autrement dit, une boule conductrice de charge q produit à l'extérieur le même champ qu'une charge ponctuelle q située en son centre.

- ▶ Supposons maintenant un conducteur enfermant une cavité dans laquelle se trouve une charge ponctuelle q . Le caractère ponctuelle n'a pas d'importance ici; il pourrait très bien s'agir d'un petit volume quelconque chargé. Cette charge a pour effet d'attirer ou de repousser (ça dépend de son signe) les électrons libres du conducteur de sorte que la surface interne du conducteur présente une distribution de charge q' . Pour trouver q' , il suffit d'utiliser le théorème de Gauss en choisissant une surface fermée entourant la cavité et située dans le conducteur. Puisqu'en tout point de la surface de Gauss le champ électrique est nul, alors le flux électrique l'est également. Par conséquent, en vertu du théorème de Gauss, $q' + q = 0$: la surface interne se remplit d'une charge opposée; c'est ce qu'on appelle l'influence totale.
- ▶ Si maintenant on retire la charge q , dans ce cas $q' = 0$. Il est facile de montrer que la densité de charge est partout nulle sur la surface interne du conducteur. En effet, si la surface interne présente une distribution de charge alors elle contient des charges + et - (puisque $q' = 0$). Les lignes de champ partiraient alors des charges + pour rejoindre les charges - (elles ne peuvent pas s'arrêter dans la cavité puisqu'il n'y a pas de charges). Dans ce cas, on aurait des lignes de champ qui partiraient d'un point porté au même potentiel que le point d'arrivée. Or, par nature ($\vec{E} = -\text{grad}V$), une ligne de champ ne peut visiter que des points de potentiel décroissant, ce qui infirme l'hypothèse de départ. Finalement, dans une cavité vide de charge, la surface interne est également vide de charge ce qui implique un champ nul et un potentiel constant et égal à celui du conducteur. Cela signifie par exemple que toute perturbation électrique produite à l'extérieur du conducteur n'a strictement aucune action à l'intérieur de la cavité : c'est l'effet « cage de Faraday ».

4.3 Notion de capacité

Capacité d'un conducteur

Portons un conducteur \mathcal{C} au potentiel V_0 et notons la charge Q_0 qui se répartit en surface. Ce conducteur produit à l'extérieur un potentiel

$$V(M) = \iint \frac{\sigma_e dS}{4\pi\epsilon_0 r}$$

en prenant comme convention $V(\infty) = 0$. Les charges se répartissent donc de façon à ce que $V(M) = V_0$ pour tout point $M \in \mathcal{C}$.

Définissons maintenant un potentiel $V'(M) = \lambda V(M)$ avec λ un nombre réel. Ce potentiel vérifie la condition aux limites $V'(M \in \mathcal{C}) = \lambda V_0$. C'est donc le potentiel produit par le conducteur mis au potentiel

$V'_0 = \lambda V_0$. Notons σ'_e la nouvelle distribution de charges. On a

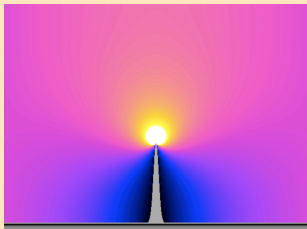
$$V'(M) = \iint \frac{\sigma'_e dS}{4\pi\epsilon_0 r} = \lambda V(M) = \lambda \iint \frac{\sigma_e dS}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \forall M$$

ce qui implique $\sigma'_e = \lambda\sigma_e$ soit $Q'_0 = \lambda Q_0$.

3 : **Michael Faraday (1791 - 1867)** : physicien et chimiste anglais. En 1831, il découvre l'induction électromagnétique qui permettra la construction des dynamos. En 1833, il établit la théorie de l'électrolyse. Il travailla également sur le phénomène d'électroluminescence, le diamagnétisme et l'action d'un champ magnétique sur la lumière polarisée.

Effet de pointe

Lorsqu'on soumet un conducteur à un potentiel V , les charges ne se répartissent pas toujours uniformément. L'exemple ci-contre montre que la charge varie comme le rayon de courbure et donc que la densité de charge varie comme l'inverse du rayon de courbure. C'est pourquoi, le champ électrique devient très important au voisinage des pointes conductrices, là où le rayon de courbure est petit. La simulation ci-dessous illustre ce phénomène. Cet effet, dit *effet de pointe*, permet d'expliquer pourquoi la foudre tombe le plus souvent sur des corps pointus (clochers, arbres) et notamment sur les paratonnerres qui servent précisément à cela : près d'une pointe le champ électrique peut être suffisamment important pour ioniser localement l'air et produire un canal conducteur qui peut entrer en contact avec un canal conducteur descendant ; un éclair se produit alors.



Capacité d'un conducteur

Le rapport

$$\frac{Q'_0}{V'_0} = \frac{Q_0}{V_0} = C > 0$$

est une constante caractéristique de la géométrie du conducteur. C désigne la capacité du conducteur seul. Elle mesure la capacité d'un conducteur à stocker une quantité de charge sous un potentiel électrique donné. La capacité se mesure en **farad (F)** en hommage à Faraday³.

Exemple – Capacité d'une sphère conductrice de rayon R

Lorsque l'on porte un conducteur sphérique au potentiel V_0 , du fait de la symétrie sphérique, les charges se répartissent de façon uniforme : σ_e est constant. Le potentiel électrique V_c produit au centre de la boule se calcule aisément :

$$V_c = \iint \frac{\sigma_e dS}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R}$$

La capacité d'un conducteur sphérique s'écrit donc

$$C = \frac{Q_0}{V_0} = \frac{Q_0}{V_c} = 4\pi\epsilon_0 R$$

La capacité d'une boule conductrice est proportionnelle à son rayon. Notez que si l'on prend un conducteur sphérique de rayon égal au rayon de la Terre, on trouve une capacité $C = 0,7 \text{ mF}$, ce qui montre que le farad n'est pas une unité très adaptée ; aussi utilise-t-on ses sous multiples.

Les condensateurs

Considérons deux conducteurs \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . On électrise \mathcal{C}_1 en le portant au potentiel V_1 : il s'entoure alors d'une charge Q_1 (positivement pour fixer les idées). Quant à \mathcal{C}_2 , il est neutre. Approchons maintenant le conducteur chargé vers le conducteur neutre : le champ électrique créé par \mathcal{C}_1 éloigne alors les charges positives et attire les charges négatives. Ainsi, \mathcal{C}_2 se recouvre d'une distribution de charge non uniforme telle que $\int \sigma_e dS = 0$. Si maintenant, le conducteur \mathcal{C}_2 est mis à la Terre ($V_2 = 0$), les charges positives vont être neutralisées par des charges provenant de la Terre. Le résultat est que le conducteur \mathcal{C}_2 se charge négativement : on dit que le conducteur s'est chargé par *influence partielle*. On a la relation

$$Q_2 = C_{21}V_1$$

où $C_{21} < 0$ désigne le coefficient d'influence.

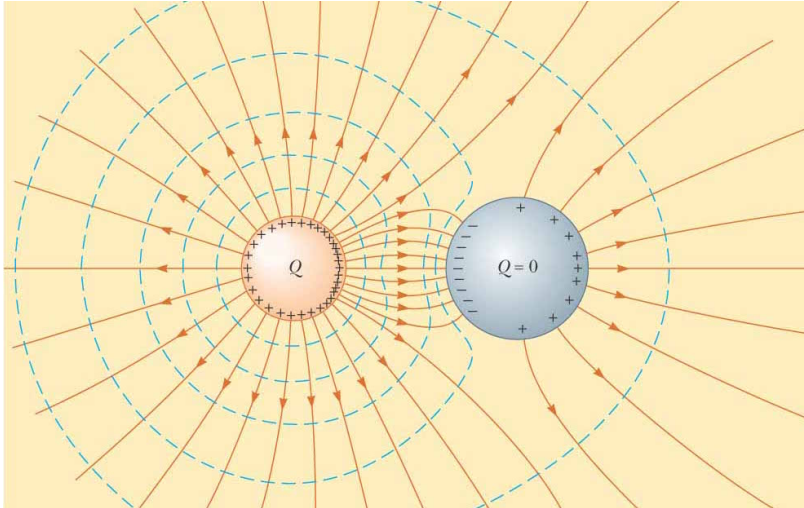


FIG. 4.6 : Influence partielle. ©2004 Thomson - Brooks/Cole

Examinons maintenant le cas particulier où le conducteur \mathcal{C}_2 entoure \mathcal{C}_1 . Dans cette configuration, toutes les lignes de champ issues de \mathcal{C}_1 arrivent nécessairement sur \mathcal{C}_2 . La surface intérieure de \mathcal{C}_2 se recouvre d'une charge $Q_{2 \text{ int}}$ de signe opposé à celle que contient \mathcal{C}_1 . Par ailleurs, en vertu du théorème de Gauss on a

$$Q_1 = -Q_{2 \text{ int}}$$

On parle d'*influence totale* et l'ensemble des deux conducteurs forme alors ce que l'on appelle un *condensateur constitué de deux armatures conductrices*.

La capacité d'un condensateur mesure l'aptitude à stocker une quantité de charge sur l'armature interne. En effet, on montre que si l'on soumet le condensateur à une tension $U = V_1 - V_2$, l'armature interne se recouvre d'une charge

$$Q_1 = CU \quad \heartsuit \quad (4.10)$$

où C mesure la capacité du condensateur et ne dépend que de sa géométrie. La capacité d'un condensateur se mesure, comme la capacité d'un conducteur, en farad (symbole : F). L'ordre de grandeur de C est variable; ça va *grosso modo* de 10^{-12} F à 10^{-3} F.

Capacité d'un condensateur plan

On forme un condensateur plan en approchant deux conducteurs plans soumis à une différence de potentiel. Sur la figure ci-contre, l'armature du bas est soumise à un potentiel positif V_+ et celle du haut à un potentiel V_- de sorte que la tension qui règne entre les armatures vaut $U = V_+ - V_-$. Sur les faces en regard se condensent des charges de signe opposé : on a influence totale. En revanche, sur les faces externes des armatures, la densité de charge est quasi nulle. En effet, comme on peut le voir sur la carte d'intensité du champ, le champ électrique est intense entre les armatures et quasi-nul à l'extérieur. On remarque également qu'entre les armatures, les lignes de champ sont rectilignes ce qui signifie que le champ est uniforme

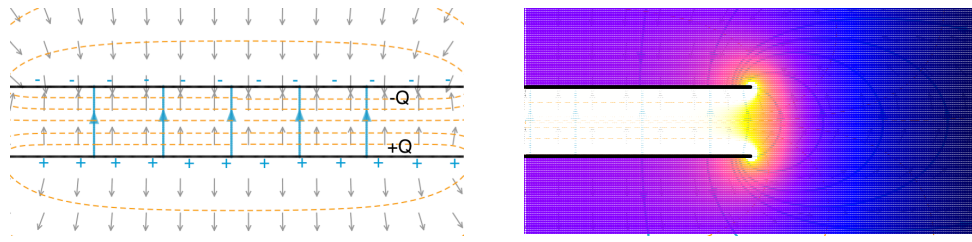


FIG. 4.7 : À gauche : condensateur plan. À droite : effets de bord. Pour une animation interactive, voir <https://femto-physique.fr/simulations/condensateur-plan.php>.

comme on peut également le voir sur la carte d'intensité. Notez enfin ce qui se passe aux bords des armatures : les charges ont tendance à se concentrer sur les bords par effets de pointe, ce qui explique la valeur intense du champ près des bords. Le caractère uniforme du champ n'est donc valable qu'entre les armatures et tant qu'on reste éloigné des bords.

Calculons la capacité de ce condensateur en supposant les armatures suffisamment proches pour pouvoir utiliser le théorème de Coulomb. Le champ électrique qui règne entre les armatures vaut donc $\vec{E} = \sigma_e / \epsilon_0 \vec{n}_{\text{ext}}$. La tension qui règne entre les armatures s'obtient en intégrant ce champ le long d'une ligne de champ :

$$U = V_+ - V_- = \int_{A_+}^{A_-} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma_e e}{\epsilon_0}$$

où e désigne l'espacement entre les armatures. De plus, si l'on néglige les *effets de bord*, on peut considérer que la répartition des charges est uniforme, d'où $Q = \sigma_e S$ avec S l'aire de chaque face en regard et $\pm Q$ les charges des faces en influence totale. Ainsi, on trouve

$$Q = \left(\frac{\epsilon_0 S}{e} \right) U$$

Un condensateur plan, possède donc une capacité

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad \heartsuit \quad (4.11)$$

La relation obtenue indique que plus l'espacement est petit, plus le phénomène de condensation est important.

Rôle du diélectrique – La formule précédente est valable si l'espace inter-armatures est vide. En pratique, on enroule deux rubans métalliques (aluminium ou étain) jouant le rôle des armatures, que l'on sépare par deux rubans isolants (papier paraffiné, plastique). La présence de cet isolant, dit diélectrique, a pour effet d'augmenter la capacité du condensateur formé suite au phénomène de polarisation électrique (voir cours Électromagnétisme II). On montre que la capacité s'écrit sous la forme

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad \text{avec} \quad \epsilon = \epsilon_0 \times \epsilon_r$$

où ϵ_r désigne la *permittivité diélectrique relative* qui dépend du matériau diélectrique utilisé.

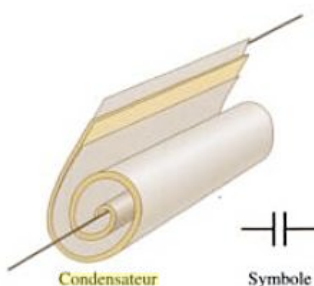


FIG. 4.8 : Fabrication d'un condensateur plan réel

Diélectrique	ϵ_r	Diélectrique	ϵ_r
vide	1	Mica	3-6
air	1,0006	Bois	2,5-8
paraffine	2,5-3,5	Porcelaine	6
huile	4	Glycérine	56
verre	5-10	Eau Pure	81

TAB. 4.3 : Permittivités diélectriques relatives de quelques matériaux.

Énergie stockée par un condensateur

Par définition, l'énergie d'un condensateur chargé W_E est l'énergie qu'il est susceptible de libérer lors de sa décharge, c'est-à-dire lorsqu'on ramène sa tension à zéro en reliant les deux armatures par un fil conducteur, par exemple.

Considérons l'armature interne au potentiel V_A et portant une charge Q . L'armature externe soumise au potentiel V_B porte, quant à elle, une charge interne $-Q$ et une charge externe Q' qui ne dépend que du potentiel V_B .

Lorsque le condensateur est chargé, l'énergie électrostatique du système de charge vaut :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i = \frac{1}{2} (QV_A - QV_B + Q'V_B)$$

On décharge le condensateur en augmentant le potentiel V_A à la valeur V_B : il n'y a plus de charge en influence mais il reste éventuellement une charge Q' sur la face externe de l'armature :

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i = \frac{1}{2} Q'V_B$$

Par définition, l'énergie électrostatique du condensateur W_E vaut

$$W_E = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} QU_{AB} = \frac{1}{2} CU_{AB}^2 \quad \heartsuit \quad (4.12)$$

INTERACTIONS MAGNÉTIQUES

5

Ce cours introduit la notion de champ magnétique en laissant de côté pour l'instant son origine. On se concentre ici sur les interactions magnétiques :

- ▶ l'interaction de Lorentz entre une charge et un champ magnétique;
- ▶ l'interaction de Laplace entre un conducteur parcouru par un courant électrique et un champ magnétique.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/interaction-magnetique.php>

5.1 Les aimants	41
Propriétés des aimants	41
Champ magnétique	42
5.2 Force de Lorentz	42
Définition du champ B	42
Particule dans un champ B	44
Quelques applications	45
5.3 Interaction avec les courants	47
Force de Laplace	47
Effet Hall (1879)	48
Travail des forces de Laplace	49
Actions sur un dipôle	51

5.1 Les aimants

Propriétés des aimants

La « pierre d'aimant » qui a la propriété d'attirer les petits morceaux de fer, est connue depuis l'antiquité grecque. On trouve cette pierre étonnante dans la région de Magnésie, en Asie Mineure. On sait aujourd'hui qu'elle est formée essentiellement d'oxyde de Fer Fe_3O_4 que l'on appelle magnétite. Façonnée et polie en forme de cuiller, elle est utilisée en Chine dès le III^e siècle à des fins divinatoires. Il faut attendre l'an Mille environ pour voir apparaître les premières boussoles. Elle est adoptée par les navigateurs arabes puis européens pour s'orienter en mer. L'usage du compas de marine devient primordial avec les grandes explorations à la Renaissance. Sa pièce principale est une aiguille d'acier que l'on a aimantée par frottement contre une pierre d'aimant. Les aimants présentent toujours au moins deux

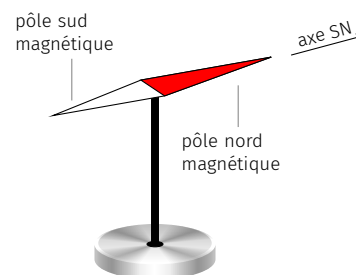


FIG. 5.1 : Aiguille aimantée

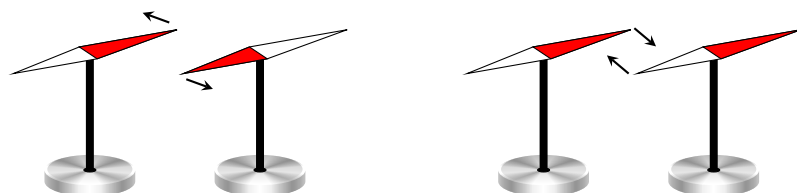


FIG. 5.2 : Interactions entre aimants.

pôles, appelés pôle sud et pôle nord. Lorsque l'on approche deux aimants, on met aisément en évidence deux types d'interaction : deux pôles de même nature se repoussent alors que deux pôles de nature différente s'attirent.

Notion de champ magnétique

Expérience

En un point de la surface terrestre et en l'absence d'aimants et/ou de circuits électriques, l'aiguille d'une boussole s'oriente dans la direction Sud-Nord. Approchons un aimant : l'orientation de la boussole s'en trouve modifiée. Déplaçons la boussole autour de l'aimant : la direction de la boussole varie d'un point à l'autre. Enfin, perturbons l'aiguille de la boussole : elle se met à osciller autour de la direction indiquée initialement. Si l'on rapproche l'aimant, l'aiguille oscille de plus en plus vite.

Interprétation – Sur Terre, il règne un champ de force magnétique qui oriente toutes les boussoles dans l'axe Sud-Nord. Par convention, le pôle qui indique le Nord¹ est appelé pôle nord de la boussole, l'autre étant alors le pôle sud.

1 : Il s'agit du nord magnétique terrestre situé dans l'océan arctique, à quelques degrés de latitude du Nord géographique

Un aimant modifie les propriétés magnétiques de l'espace : il crée un champ magnétique. Ce champ présente une direction donnée par la boussole et un sens donné par l'axe SN de la boussole.

Enfin, plus ce champ est important, plus l'aiguille est forcée de s'aligner avec ce champ ce qui explique l'augmentation de la fréquence des oscillations.

Conclusion

L'espace est caractérisé par un champ de force qui présente les attributs d'un vecteur que l'on nomme vecteur champ magnétique et que l'on note généralement $\vec{B}(M)$. Ce champ est détectable par une boussole.

Une façon de visualiser le champ magnétique que produit un aimant consiste à disperser autour, de la limaille de fer : les aiguilles de fer s'aimantent puis se comportent comme de petites boussoles qui s'orientent suivant le champ magnétique local.

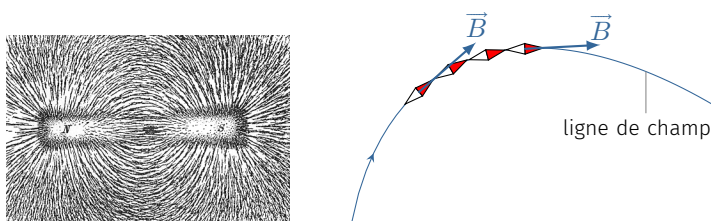


FIG. 5.3 : Spectre magnétique : les grains de limaille de fer se comportent comme de petites boussoles, matérialisant ainsi les lignes de champ.

5.2 Force de Lorentz

Définition du champ magnétique

Le champ magnétique est défini à partir de la force de déflexion que ressent une particule chargée en présence d'une source de champ magnétique.

Considérons un tube de Crookes dans lequel on produit un faisceau d'électrons entre deux électrodes. Les électrons, en entrant en collision avec les quelques molécules du gaz résiduel du tube, produisent une lumière de fluorescence, rendant ainsi visible leur trajectoire.

Approchons maintenant un aimant perpendiculairement à la vitesse initiale : le faisceau est alors dévié tout en restant dans un plan perpendiculaire au champ magnétique. Ainsi, une charge électrique en mouvement ressent, en plus de la force électrique, une force de nature magnétique. L'analyse de la trajectoire montre que la force électromagnétique que subit une particule chargée en mouvement s'écrit

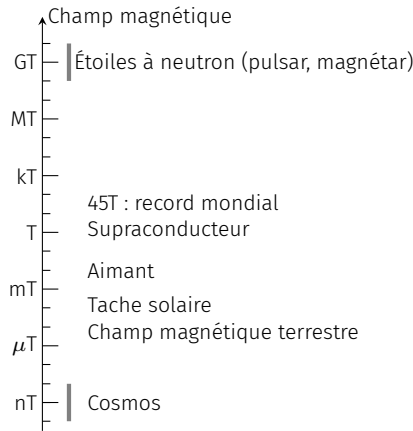
$$\vec{f} = \underbrace{q\vec{E}}_{\text{force électrique}} + \underbrace{q\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\text{force magnétique}} \quad \heartsuit \quad (5.1)$$

ce qui définit le champ magnétique \vec{B} .

Dans le Système International d'Unités, le champ magnétique s'exprime en Tesla en hommage à Nikola Tesla². L'analyse dimensionnelle montre que

$$[f] = ILB \implies 1 \text{ T} = 1 \text{ N}\cdot\text{A}^{-1}\text{m}^{-1}$$

La figure ci-dessous donne quelques ordres de grandeurs du champ magnétique.



La force magnétique étant constamment perpendiculaire au vecteur vitesse, elle ne fournit pas de puissance mécanique et donc pas de travail.

$$\vec{f} \perp \vec{v} \implies \mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$$

Par conséquent, en vertu du théorème de l'énergie cinétique, une particule soumise uniquement à la force magnétique conserve sa vitesse constante en norme :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \mathcal{P} = 0$$

La force magnétique incurve la trajectoire sans modifier la vitesse de la particule.

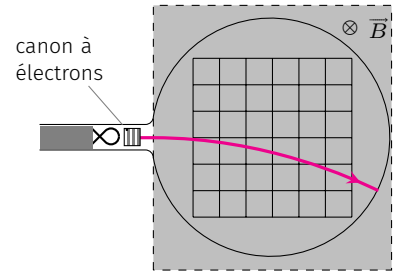


FIG. 5.4 : Déflexion magnétique.

2 : **Nikola Tesla (1856-1943)** : ingénieur électricien croate (Empire Austro-hongrois) naturalisé américain, il est considéré comme l'un des plus grands inventeurs du 20ème siècle avec plus de 900 brevets à son actif. Il fut l'opposant à Edison concernant le transport de l'électricité et partisan de l'utilisation des courants alternatifs.

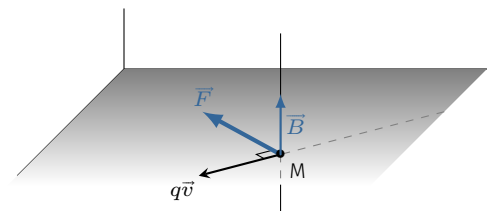


FIG. 5.5 : Force magnétique.

La force magnétique ne travaille pas. Cependant, si le champ magnétique varie dans le temps, il apparaît un champ électrique lié à la variation du champ magnétique (phénomène d'induction) qui, lui, travaille.

Particule dans un champ magnétique uniforme

Étudions le mouvement d'une particule de charge q située dans une zone où règne un champ magnétique uniforme et permanent \vec{B} . On néglige la force de gravitation devant la force de Lorentz.

Dans la base de Frenet, l'accélération de la particule s'écrit (cf. Mécanique du point - Cinématique) :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n} = \frac{v^2}{R} \vec{n} \quad \text{car } v = C^{te}$$

Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, la seconde loi de Newton $f = ma$ donne

$$|q| v B \sin \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

où α représente l'angle que fait le vecteur vitesse avec le vecteur champ magnétique. Trois cas de figure se présentent :

- ▶ $\alpha = 0$ ou π : la force magnétique est nulle et le vecteur vitesse reste constant en direction et en norme. Le mouvement est rectiligne uniforme.
- ▶ $\alpha = \pi/2$: la vitesse n'a pas de composante suivant \vec{B} , et la force est perpendiculaire au champ magnétique. Ainsi, le mouvement s'effectue dans le plan formé par la vitesse \vec{v} et la force de Lorentz. Par ailleurs, le rayon de courbure vaut $R = \frac{mv}{|q|B}$. Ce rayon de courbure est constant si le champ magnétique est uniforme et permanent : la trajectoire est donc un cercle³ de rayon

$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad \heartsuit \quad (5.2)$$

Ce cercle est décrit à la vitesse angulaire

$$\omega_c = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m}$$

qui ne dépend que du rapport q/m et du champ magnétique. Cette vitesse angulaire est aussi appelée **pulsation cyclotron**.

- ▶ Dans les autres cas, il est facile de montrer que la composante de la vitesse suivant la direction du champ magnétique reste constante. Le mouvement se décompose alors en un mouvement uniforme suivant le champ magnétique et un mouvement circulaire dans un plan perpendiculaire. On obtient un **mouvement hélicoïdal** dont l'axe est le champ magnétique et le rayon de courbure

$$R = \frac{mv}{|q|B \sin \alpha}$$

3 : Une particule accélérée dissipe de l'énergie sous la forme d'un rayonnement électromagnétique, dit rayonnement cyclotron, et a pour effet une diminution de la vitesse –et donc du rayon de courbure– au cours du temps. Cet effet est négligé ici.

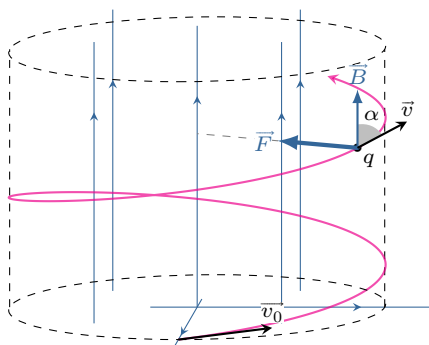


FIG. 5.6 : Mouvement hélicoïdal d'une particule de charge négative dans un champ magnétique.

La formule (5.2) peut s'écrire $R = \frac{p}{|q|B}$ avec p la quantité de mouvement de la particule. Cette formule a l'intérêt d'être applicable dans le cas où les particules sont relativistes.

Quelques applications

Le cyclotron – Le cyclotron est un accélérateur de particules inventé par l'américain Lawrence en 1932 (Prix Nobel 1939). Il est constitué de deux demi-cylindres creux, appelés « dees », séparés par un intervalle étroit. Dans les « dees », il règne un champ magnétique uniforme perpendiculaire à leur base. Une tension électrique sinusoïdale est appliquée entre les « dees » dans un plan perpendiculaire au champ magnétique.

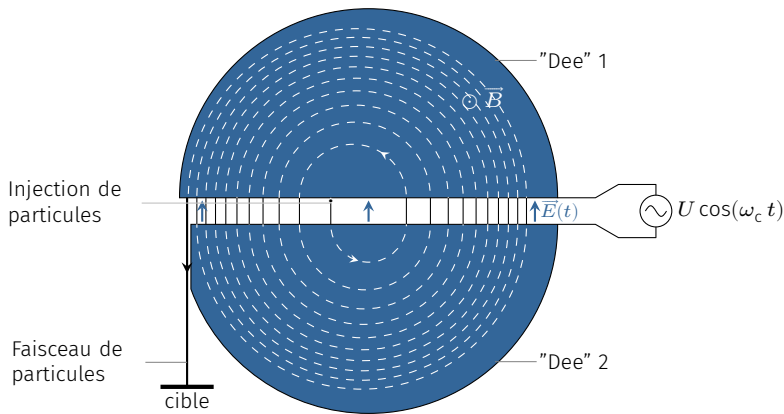


FIG. 5.7 : Principe du cyclotron (la charge est négative ici).

Le principe du cyclotron repose essentiellement sur le fait que la fréquence de révolution d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme est indépendante de la vitesse de la particule. On injecte au centre du dispositif des particules chargées, en général des protons ou des ions. La tension produite entre les « dees » accélère les particules. Ensuite, arrivées dans un des « dees », elles décrivent des portions de cercle à la vitesse angulaire $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$ indépendante de leur vitesse. La tension appliquée oscille à la fréquence cyclotron de sorte que les particules en sortant du « dee » sont à nouveau accélérées. Gagnant de la vitesse, ils décrivent dans le « dee » suivant un arc de cercle de rayon plus grand. Ainsi, à chaque tour, le rayon de courbure augmente jusqu'à atteindre le rayon maximum R_{\max} imposé par la taille du cyclotron. En sortie du cyclotron, le faisceau de particules accélérées est en général envoyé sur une cible.

La quantité de mouvement maximum des particules vaut alors

$$p = mv_{\max} = |q|BR_{\max}$$

L'énergie cinétique maximum s'écrit simplement

$$\mathcal{E}_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{q^2 B^2 R_{\max}^2}{2m}$$

Pour un proton par exemple, en prenant $B \approx 1$ T et $R_{\max} \approx 1$ m, on obtient $\mathcal{E}_c \approx 50$ MeV.

Le cyclotron est utilisé de nos jours pour produire des Radio-Isotopes utilisés en médecine nucléaire (radio-thérapie) et en recherche pour la physique nucléaire.

Le spectromètre de masse à analyseur magnétique – La spectrométrie de masse est une technique d'analyse permettant d'identifier les molécules d'un composé à analyser. Dans un spectromètre de masse à analyseur magnétique, on injecte les molécules dans une chambre d'ionisation : un bombardement électronique permet de briser les molécules de façon à former des fragments d'ions moléculaires positifs. Ces ions sont ensuite accélérés grâce à un champ électrique et un dispositif de filtrage garantit que les ions sortent avec la même vitesse v_0 . Ils entrent ensuite dans une zone où règne un champ magnétique uniforme produit par un électroaimant. Ces ions décrivent alors un arc de cercle de rayon $R = mv_0/|q|B$ avant d'être reçu sur un détecteur. La vitesse et le champ magnétique étant contrôlés, la position de l'impact est en fait une mesure du rapport q/m des ions détectés. En faisant varier le champ magnétique on détecte des ions de masse différentes (ions différents ou ions isotopes); l'enregistrement de l'intensité du signal en fonction de la masse s'appelle le *spectre de masse*. De ces informations il est possible d'en déduire la formule brute des molécules présents dans le composé.

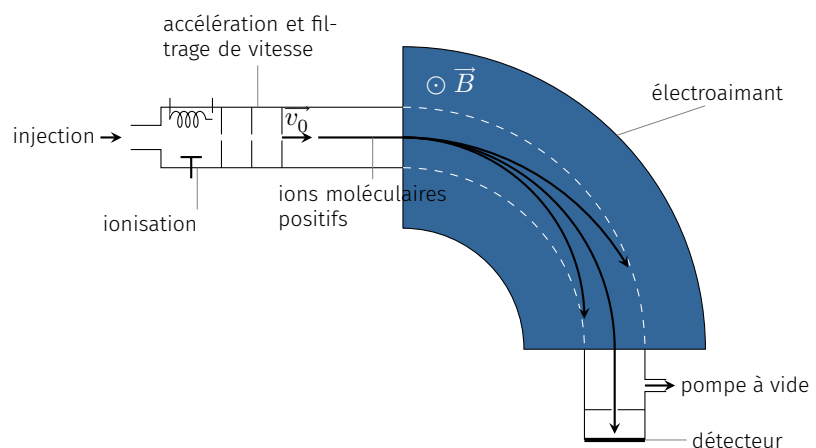


FIG. 5.8 : Principe du spectromètre de masse

L'étendue des applications de cette technologie est assez vaste.

- ▶ En chimie analytique : détermination de la formule brute des molécules;
- ▶ En chimie de l'environnement : analyse de l'air et de l'eau ; suivi de la pollution par des pesticides ou des processus industriels.
- ▶ En biochimie : identification de protéines (séquençage d'acides aminés) et de micro-organismes ; analyse de gaz sanguins ; pharmacologie ; toxicologie.
- ▶ En physique fondamentale : mesure de masse d'atomes stables.
- ▶ En sciences de la Terre : mesure des rapports isotopiques (géologie, océanographie, glaciologie, volcanologie, physique de l'atmosphère, étude des météorites, planétologie, etc.).

5.3 Interaction magnétique avec les courants électriques

Force de Laplace

Considérons un conducteur filiforme parcouru par un courant électrique d'intensité I en présence d'un champ magnétostatique \vec{B} . Admettons que ce conducteur soit en mouvement dans le champ magnétique et analysons les forces qui s'exercent sur une portion orientée $d\vec{\ell}$ de conducteur.

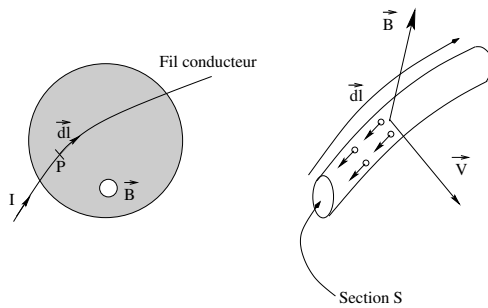


FIG. 5.9 : Notations pour la force de Laplace.

Adoptons les notations suivantes :

- ▶ s est la section droite du fil conducteur ;
- ▶ n_- est le nombre de porteurs de charges mobiles (charges q_-) par unité de volume ;
- ▶ n_+ est le nombre de cations fixes (charges q_+) par unité de volume assurant la neutralité de la matière ;
- ▶ \vec{V} est la vitesse de la portion de conducteur *par rapport au laboratoire* ;
- ▶ \vec{v} est la vitesse moyenne des porteurs de charge libres *par rapport au conducteur*.

L'électroneutralité du conducteur impose

$$n_-q_- + n_+q_+ = 0$$

Intéressons-nous à la force magnétique que ressent une portion de conducteur. Appelons $d\vec{\ell}$ un élément de longueur du conducteur situé en M et orienté par le sens algébrique du courant. Sommons toutes les forces magnétiques de Lorentz subies par toutes les particules chargées :

$$d\vec{F} = n_-sdlq_-(\vec{v} + \vec{V}) \wedge \vec{B} + n_+sdlq_+ \vec{V} \wedge \vec{B} = n_-sdlq_- \vec{v} \wedge \vec{B}$$

On reconnaît dans cette expression le vecteur densité de courant $\vec{j}_e = q_-n_-\vec{v}$ d'où

$$d\vec{F} = sd\vec{j}_e \wedge \vec{B}$$

Dans le cas d'un circuit filiforme, on a $\vec{j}_e s dl = I d\vec{\ell}$. Ainsi

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

La résultante des forces s'écrit alors

$$\vec{F} = \oint_e I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad \heartsuit \quad (5.3)$$

Cette force, dite force de Laplace, représente la force macroscopique que ressent un conducteur dans un champ magnétique.

Si le conducteur n'est pas filiforme, on utilisera la formule plus générale

$$\vec{F} = \iiint \vec{j}_e \wedge \vec{B} d\tau$$

où l'intégration est effectuée sur le volume du conducteur ($d\tau$ représente l'élément de volume).

La force de Laplace possède de nombreuses applications dans le domaine électrotechnique :

- ▶ le moteur électrique continu produit un mouvement rotatif à l'aide d'un courant continu dans un champ magnétique radial;
- ▶ le haut-parleur électrodynamique produit un déplacement alternatif d'une membrane à l'aide d'un courant alternatif transformant ainsi l'énergie électrique en énergie sonore;
- ▶ l'ampèremètre à aiguille relie la mesure d'une intensité électrique à un angle de torsion d'un circuit électrique dans un champ magnétique.

Effet Hall (1879)

On peut se demander comment les porteurs de charge libres réussissent à transmettre la force magnétique à l'ensemble du conducteur. En fait, en présence d'un champ magnétique, ces porteurs de charge sont déviés et tentent de sortir du conducteur. Cependant, les charges fixes du cristal les retiennent au sein du conducteur : c'est par ce processus que la force magnétique est transmise au conducteur.

De surcroît, en s'accumulant sur les parois, les porteurs de charge libres créent un champ électrique dont l'effet compense la force magnétique et assure ainsi un régime permanent (les porteurs de charge se déplacent à une vitesse moyenne constante). Ce champ électrique produit une tension que l'on peut mesurer : c'est l'effet Hall⁴.

4 : Découvert en 1879 par Edwin Herbert Hall.

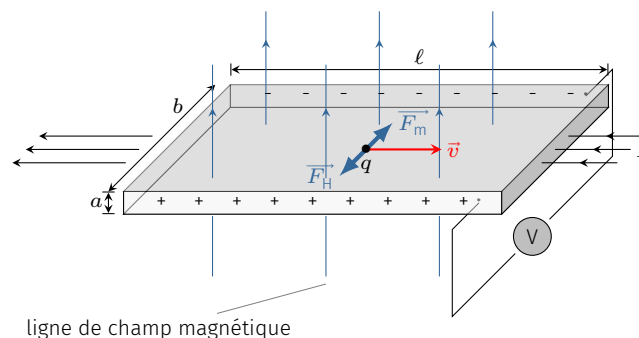


Fig. 5.10 : Effet Hall

Considérons une plaquette conductrice de longueur ℓ , de largeur b et de faible épaisseur a . La plaquette, parcourue par un courant d'intensité I , est placée dans un champ magnétostatique uniforme et perpendiculaire à sa plus grande face. La force magnétique concentre les charges mobiles sur un bord ce qui produit une force électrique s'opposant à la force magnétique. Une situation d'équilibre apparaît très vite quand :

$$q_- \vec{E} + q_- \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0} \implies E = vB$$

Le champ électrique est tel que le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{v})$ est direct. Il règne donc une tension U_H , dite tension de Hall, entre les bords de la plaquette. Cette tension s'obtient en calculant la circulation du champ électrique entre les bords. Le champ électrique étant constant on a tout simplement

$$U_H = E \times b = vBb$$

Or, le courant électrique présente une intensité

$$I = j_e s = n_- |q_-| v ab$$

D'où

$$U_H = R_H \frac{IB}{a} \quad \text{avec} \quad R_H = \frac{1}{|q_-| n_-} \quad \heartsuit \quad (5.4)$$

où la grandeur R_H désigne la *constante de Hall*. Ainsi, on prévoit que la tension de Hall est proportionnelle au champ magnétique. Cet effet est mis à profit dans les *Teslamètres à effet Hall*⁵. On trouve également des sondes à effet Hall dans les téléphones portables ce qui permet de mesurer l'orientation du champ magnétique terrestre et donc de s'orienter. Par ailleurs, la polarité de la tension de Hall permet d'identifier la nature des porteurs de charge libres.

L'étude de l'effet hall dans des systèmes ultra minces (systèmes 2D) à basse température et en présence d'un fort champ magnétique a mis en évidence l'effet Hall quantique qui valu le prix Nobel de Physique à Klaus von Klitzing en 1985. Evidemment, une description quantique de la conduction est nécessaire pour interpréter ce phénomène.

5 : Pour un champ magnétique de 1T, une intensité électrique de 1A et une épaisseur $a = 100 \mu\text{m}$ on obtient $U_H \approx 1 \mu\text{V}$ dans un métal. Cette tension est donc difficilement mesurable. En revanche, dans un semi-conducteur l'effet est multiplié par 10^6 car la densité des porteurs de charge est beaucoup plus faible ce qui explique leur utilisation dans les tesla-mètres.

Travail des forces de Laplace

Cherchons à calculer le travail des forces de Laplace lors du déplacement d'un circuit alimenté par un courant constant dans un champ indépendant du temps.

Cas d'un cadre rectangulaire – Considérons un cadre ABCD rectangulaire parcouru par un courant d'intensité I se déplaçant dans un champ magnétique uniforme. Pour simplifier nous supposons que le cadre se déplace suivant (AB) et qu'il peut se déformer (son aire peut donc varier). Notons \vec{AA}' le déplacement de la portion AD et \vec{BB}' celui de la portion BC.

Seules les forces qui s'exercent sur AD et BC travaillent. La portion AD

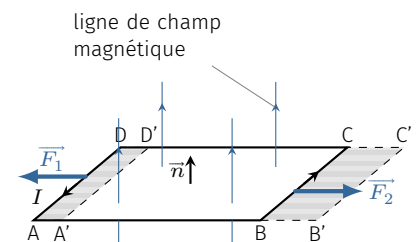


FIG. 5.11 : Circuit électrique rectangulaire en mouvement dans un champ magnétique.

subit une force de Laplace \vec{F}_1 dont le travail s'écrit

$$W_1 = I(\overline{DA} \wedge \vec{B}) \cdot \overline{AA'} = I(\overline{AA'} \wedge \overline{DA}) \cdot \vec{B}$$

Or, le vecteur $\overline{AA'} \wedge \overline{DA}$ a pour norme, l'aire S_1 de la surface balayée et est dirigé perpendiculairement à celle-ci. On a

$$W_1 = -I\vec{B} \cdot \vec{n}S_1$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface du cadre dont le sens est lié au sens positif du courant via la règle du tire-bouchon⁶. De la même manière, la force \vec{F}_2 qui s'exerce sur la portion BC produit un travail

$$W_2 = I(\overline{BC} \wedge \vec{B}) \cdot \overline{BB'} = I(\overline{BB'} \wedge \overline{BC}) \cdot \vec{B}$$

Ici, le vecteur $\overline{BB'} \wedge \overline{BC}$ a pour norme l'aire de la surface balayée par la branche BC et un sens identique à \vec{n} . On a donc

$$W_2 = I\vec{B} \cdot \vec{n}S_2$$

Finalement, le travail des forces de Laplace qui s'exerce sur le cadre vaut $W = I\vec{B} \cdot \vec{n}(S_2 - S_1)$. Si l'on note $\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{n}S$ le flux magnétique à travers le cadre, on trouve

$$W = I\Delta\phi_B$$

Le travail est proportionnel à l'intensité du courant et à la variation du flux magnétique.

Généralisation – Le calcul réalisé précédemment se généralise à tout circuit dans un champ magnétique permanent. On retiendra que le travail des forces de Laplace vaut

$$W = I\Delta\phi_B \quad \text{avec} \quad \phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad \heartsuit \quad (5.5)$$

On peut s'étonner de l'apparente contradiction qu'il y a entre le fait que la force de Laplace est d'origine magnétique et qu'elle produit paradoxalement du travail. En réalité, le travail des forces magnétiques qui s'exercent sur les charges (libres et fixes) est bien nul. En effet

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum (q_i \vec{v}_i \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_i dt = \vec{0}$$

Cependant, ce que l'on a calculé représente le travail macroscopique des forces magnétiques et s'écrit

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \sum (q_i \vec{v}_i \wedge \vec{B}) \cdot \vec{V} dt$$

où \vec{V} est la vitesse de déplacement du conducteur (et non des charges). Ce travail non nul est en fait compensé par un travail microscopique dit travail électromoteur.

Énergie d'interaction d'un circuit dans un champ magnétique – Selon (5.5), le travail des forces de Laplace ne dépend que de l'état initial et final quel que soit le chemin suivi entre ces deux états. On peut donc définir l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p^{\text{mag}}$:

$$W = -\Delta\mathcal{E}_p^{\text{mag}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -I\phi_B \quad \heartsuit \quad (5.6)$$

Règle du flux maximum – Ainsi, un circuit électrique en présence d'un champ magnétique cherchera à minimiser son énergie potentielle magnétique c'est-à-dire à maximiser son flux magnétique : c'est la règle du flux maximum. Pour illustrer cette propriété, imaginons une spire alimentée par un courant d'intensité I et suspendue par deux fils électriques rigides. Approchons le pôle sud d'un aimant. Imaginons que l'orientation du courant soit telle que le flux est positif. Pour maximiser le flux magnétique, la spire doit se rapprocher de l'aimant, là où le champ magnétique est le plus fort : la spire est alors attirée vers l'aimant. Invertissons maintenant le sens du courant. Le flux magnétique est négatif et chercher à le maximiser revient à s'éloigner

de l'aimant : la spire est repoussée par l'aimant.

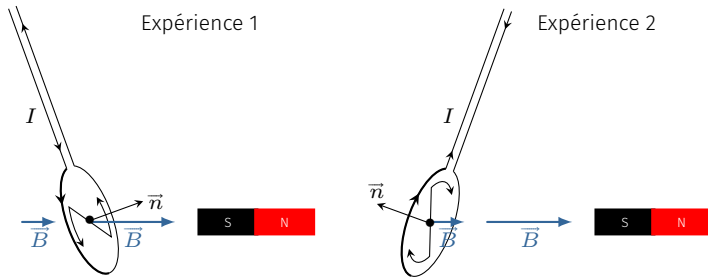


FIG. 5.12 : Illustration de la règle du flux maximum.

Finalement, ces expériences montrent qu'une spire se comporte comme un aimant dont la polarité dépend du sens du courant. Le vecteur \vec{n} indique l'axe sud-nord de l'aimant équivalent.

Dipôle magnétique dans un champ magnétique

Comme on vient de le voir, une boucle de courant se comporte comme un aimant. On peut donc lui associer un pôle sud et un pôle nord. Pour caractériser cette polarité, on définit un vecteur orienté du sud vers le nord dit *moment magnétique* et noté $\vec{\mu}$.

Pour une spire plane quelconque, le moment magnétique s'écrit

$$\vec{\mu} = IS\vec{n} \quad \heartsuit \quad (5.7)$$

où S est l'aire de la surface de la spire et \vec{n} un vecteur unitaire perpendiculaire à la spire et dont l'orientation est associée au sens positif du courant par la règle du tire-bouchon. μ s'exprime en A.m².

Action d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique – Plaçons un dipôle magnétique dans un champ magnétique permanent. Si le dipôle est de petite taille, on peut considérer que le champ magnétique est localement uniforme. Ainsi l'énergie potentielle magnétique s'écrit

$$\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -I\phi_B = -I\vec{B} \cdot \vec{n}S = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \heartsuit \quad (5.8)$$

Le dipôle ressent une résultante des forces magnétiques (qui correspond à la force de Laplace)

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

Par conséquent, si le champ magnétique est partout le même, la quantité $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ ne dépend pas de l'espace et la force magnétique est donc nulle⁷. En revanche, en vertu de la règle du flux maximum, le

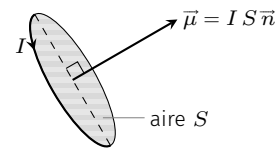
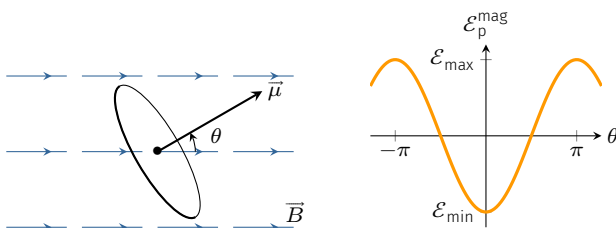


FIG. 5.13 : Moment dipolaire magnétique

De manière plus générale, toute distribution de courant localisée dans l'espace est caractérisée par un moment dipolaire magnétique. Pour une boucle filiforme quelconque (pas forcément plane), le moment magnétique s'écrit

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \oint_e \overrightarrow{OP} \wedge I d\vec{l}$$

Avec P un point parcourant la boucle.

7 : On peut retrouver ce résultat à partir de l'expression de la force de Laplace puisque si le champ magnétique est uniforme, la force de Laplace donne

$$\vec{F} = I\vec{L} \wedge \vec{B}$$

avec \vec{L} le vecteur qui joint les extrémités de la portion de circuit qui plonge dans le champ magnétique. Pour une boucle de courant, $\vec{L} = \vec{0}$, donc $\vec{F} = \vec{0}$.

FIG. 5.14 : Dipôle rigide dans un champ uniforme.

dipôle va chercher à s'orienter de façon à maximiser son flux magnétique. Appelons θ l'angle entre le moment dipolaire magnétique et le champ magnétique. L'énergie magnétique vaut

$$\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -\mu B \cos \theta$$

On constate alors qu'il existe une position d'équilibre stable lorsque le moment magnétique est aligné avec le champ magnétique extérieur. Autrement dit, les forces magnétiques présentent un couple d'orientation dont on peut exprimer le moment Γ . En effet, supposons le dipôle magnétique animé d'un mouvement de translation (vitesse \vec{V}) et d'un mouvement de rotation (vecteur rotation $\vec{\Omega}$). Pendant dt , le travail des forces magnétiques s'écrit

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{V} dt + \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} dt = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} dt \quad (5.9)$$

puisque la résultante des forces est nulle. Par ailleurs, le travail produit est relié à la variation d'énergie magnétique via

$$dW = -d\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = d(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

Or, le dipôle étant considéré rigide, le moment magnétique conserve la même norme et seule son sens varie. La formule de dérivation vectorielle (cf. cours de mécanique sur le vecteur rotation) donne $d\vec{\mu}/dt = \vec{\Omega} \wedge \vec{\mu}$ ce qui permet d'écrire

$$dW = d(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = (\vec{\Omega} \wedge \vec{\mu}) \cdot \vec{B} dt = (\vec{\mu} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{\Omega} dt$$

En comparant avec la formule (5.9), on obtient :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} \quad \heartsuit \quad (5.10)$$

On retrouve le fait que lorsque le dipôle est aligné avec le champ magnétique, le couple s'annule : le dipôle est en équilibre mécanique.

Analogies – Ces formules sont analogues à celle rencontrées dans l'étude de l'interaction d'un dipôle électrique avec un champ électrique.

Grandeurs	électriques	magnétiques
moment dipolaire	\vec{p}	$\vec{\mu}$
champ extérieur	\vec{E}	\vec{B}
énergie d'interaction	$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	$\mathcal{E}_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$
couple d'orientation	$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$	$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$

CHAMP B CRÉÉ PAR DES COURANTS

6

La loi de Biot et Savart permet de relier le courant électrique aux effets magnétiques qu'il produit dans l'hypothèse où ce courant est stationnaire. Cette loi permet, d'une part de dégager les propriétés de symétrie du champ magnétostatique et d'autre part de le calculer analytiquement dans certains cas simples comme le fil infini et la spire. Enfin, le champ créé par un dipôle magnétique est traité ce qui permet d'aborder la question de l'origine du magnétisme des aimants.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/biot-et-savart.php>

6.1 Loi de Biot et Savart . . .	53
Quelques faits historiques	53
Énoncé	54
Illustration sur un exemple	55
Topographies - Symétries	55
6.2 Champ dipolaire	58
Champ d'une spire	58
Approximation dipolaire .	59
Origines du magnétisme .	60

6.1 Loi de Biot et Savart

Quelques faits historiques

1820 : expérience d'Ørsted – Lors d'un cours, le danois Hans Christian Ørsted découvre qu'un fil conducteur parcouru par un courant électrique¹ fait dévier l'aiguille d'une boussole placée à proximité.

Cette expérience prouve sans ambiguïté le lien entre courant électrique et champ magnétique. Par ailleurs, si on inverse le sens du courant, l'aiguille tourne de 180°. L'expérience d'Ørsted suscite un grand intérêt car c'est la première fois qu'on met en évidence une force qui n'est pas suivant la ligne joignant les deux corps en interaction.

1820 : les travaux d'Ampère et d'Arago – C'est François Arago qui, après avoir assisté à une démonstration de l'expérience d'Ørsted à Genève, la présente à l'Académie des sciences de Paris. Dans l'assemblée, Ampère* est enthousiaste et se lance dans un travail expérimentale et théorique. Ampère montre notamment que deux fils rectilignes parcourus par un courant s'attirent ou se repoussent selon que les courants sont dans le même sens ou pas. Il montre également qu'une spire parcourue par un courant se comporte comme un aimant. On peut associer à une spire un pôle nord et un pôle sud. Si l'on change le sens du courant, la polarité change.

1 : À l'époque, la pile de Volta est déjà inventée.

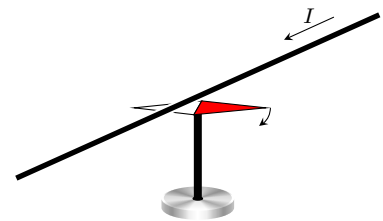


FIG. 6.1 : Expérience d'Ørsted.

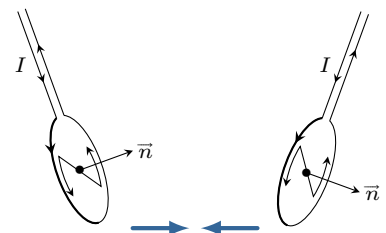


FIG. 6.2 : Expériences d'Ampère.

* **André-Marie Ampère (1775 - 1836)** : physicien et chimiste français, considéré comme le « Newton de l'électricité ». Né à Polémieux-au-Mont-d'Or, près de Lyon, fils d'un juge de paix lyonnais guillotiné sous la Révolution, André-Marie Ampère mène une brillante carrière scientifique : titulaire de la chaire de mécanique à l'École Polytechnique en 1809, il est élu à l'Académie des Sciences en 1814, puis à la chaire de physique du Collège de France en 1824. Il publie en 1827 son dernier grand ouvrage *Sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience*. Il termine sa vie en tant qu'inspecteur général de l'instruction publique et laissera son nom à l'unité de courant électrique, l'ampère.

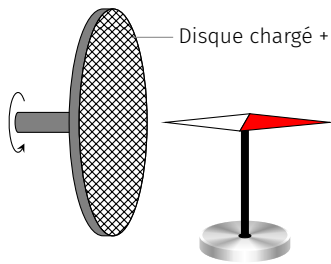


FIG. 6.3 : Expérience de Rowland

Par ailleurs, Arago qui collabore avec Ampère découvre que le courant électrique a la propriété d'aimanter le fer ce qui mènera à l'invention de l'électroaimant.

1876 : expérience de Rowland – Henry Rowland démontre, à l'aide d'un travail expérimental très soigné, qu'un disque chargé électriquement en rotation rapide produit un champ magnétique. Autrement dit, les charges électriques en déplacement produisent les mêmes effets magnétiques qu'un courant électrique ce qui suggère que le courant électrique est lié à un déplacement de charges électriques.

Conclusion

Tout mouvement de charges, et notamment le courant électrique, est source de champ magnétique.

Énoncé

L'étude quantitative des interactions entre aimants et courants fut réalisée par les physiciens Biot et Savart (1820). Ils mesurèrent la durée des oscillations d'une aiguille aimantée en fonction de sa distance à un courant rectiligne. Ils trouvèrent que la force agissant sur un pôle est dirigée perpendiculairement à la direction reliant ce pôle au conducteur et qu'elle varie en raison inverse de la distance. De ces expériences, Laplace déduisit ce qu'on appelle aujourd'hui la loi de Biot et Savart.

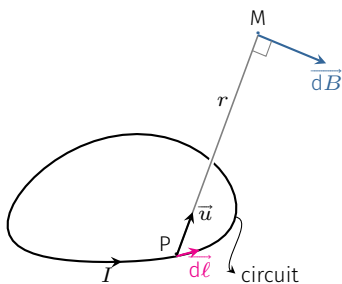


FIG. 6.4 : Notations utilisées dans la loi de Biot et Savart.

Le champ magnétique que produit une distribution filiforme de courant peut s'obtenir en décomposant la distribution en petits éléments de courant. On considère que chaque élément de courant de longueur orientée $\vec{d\ell}$ traversé par un courant d'intensité I produit un champ magnétique élémentaire en M :

$$\vec{dB}(M) = K \frac{I \vec{d\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

où K est une constante, \vec{u} le vecteur unitaire joignant l'élément de courant à M , et r la distance entre M et la portion de circuit. Il faut voir \vec{dB} comme un intermédiaire de calcul, seule la somme de toutes les contributions a un sens physique. Le champ magnétique résultant s'obtient donc en intégrant l'expression précédente, le point P parcourant tout le circuit :

$$\vec{B}(M) = \oint \vec{dB} = K \oint_{\text{circuit}} \frac{I \vec{d\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

le symbole \oint signifiant que l'intégration s'effectue le long du circuit fermé.

Loi de Biot et Savart

Dans le Système international d'unités, on pose

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad \text{avec} \quad \mu_0 \simeq 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$$

μ_0 est appelé *perméabilité magnétique du vide*. Ainsi, un circuit filiforme alimenté par un courant stationnaire d'intensité I produit un champ magnétique en M donné par

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \overline{PM}}{PM^3}$$

La loi de Biot et Savart permet de calculer le champ magnétique créé par une distribution de courant stationnaire filiforme. Cela conduit au calcul de trois intégrales scalaires voire moins lorsque le problème présente suffisamment de symétries.

Il peut arriver que le calcul analytique s'avère ardu, il faut alors envisager une approche numérique.

Exemple de calcul : le fil rectiligne infini

Considérons un fil infini d'axe Oz , parcouru par un courant constant d'intensité I et cherchons le champ magnétique produit à la distance r du fil. À l'aide de la formule de Biot et Savart, on peut exprimer le champ magnétique dB produit par la portion de longueur $d\ell$:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \cos \varphi}{PM^2}$$

avec φ l'angle que fait la droite (MP) avec le plan médiateur passant par M. Choisissons la variable φ comme variable d'intégration. Sachant que $PM = r / \cos \varphi$ et $\ell = r \tan \varphi$ (d'où l'on tire $d\ell = r \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$) on obtient

$$dB = \frac{\mu_0 I \cos \varphi}{4\pi r} d\varphi$$

Vu que tous les champs élémentaires sont colinéaires et dirigés suivant le vecteur orthoradial \vec{u}_θ , on peut ajouter les intensités des champs pour avoir le champ magnétique total

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Finalement, il règne dans l'espace un champ magnétique

$$\vec{B}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad (6.1)$$

Topographies - Symétries

Décrivons différentes situations afin de dégager les propriétés essentielles du champ magnétique.

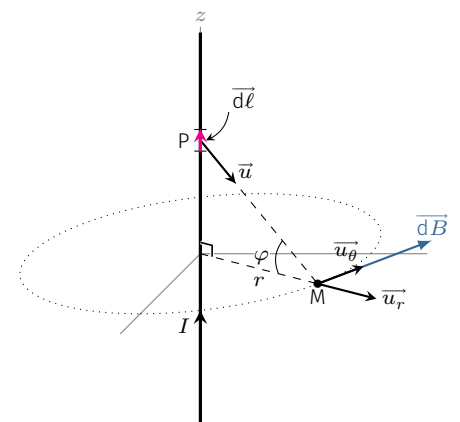


FIG. 6.5 : Champ magnétique créé par un fil rectiligne infini.

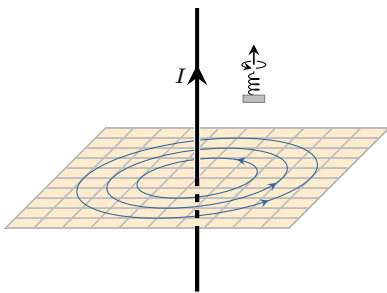


FIG. 6.6 : Champ magnétique créé par un fil infini.

Le fil infini – Comme on vient de le voir sur l'exemple précédent, le champ magnétique créé par un long fil rectiligne est *orthoradial*. Par conséquent, les lignes de champ sont des cercles. Contrairement au champ électrique, les lignes de champ magnétique se referment sur elle-même. On peut noter que le champ magnétique tourne autour du fil dans un sens imposé par la règle du tire-bouchon : **un tire bouchon tournant dans le sens du champ magnétique progresse dans le sens du courant.**

La spire circulaire – La FIG. 6.7 présente les lignes de champ magnétique que produit une spire circulaire alimentée par un courant électrique permanent. Ces lignes de champ sont dans des plans perpendiculaires à la spire et contenant son centre. On peut noter, là encore, la structure fermée de ces lignes. Comme on l'a déjà vu précédemment, on peut associer à cette spire un moment magnétique qui indique la direction sud-nord de l'aimant équivalent. Cela correspond également au sens du champ magnétique qui règne au centre de la spire.

Le solénoïde – Enroulons de façon jointive un fil conducteur sur un cylindre de longueur L : on obtient une bobine ou solénoïde. Cet enroulement est caractérisé par une densité linéique d'enroulement $n = N/L$, avec N le nombre d'enroulements. Bien que cet enroulement soit légèrement hélicoïdal, on peut, dans une première approximation, assimiler le solénoïde à une superposition de spires très rapprochées. Dans ce cas, les lignes de champ sont des courbes planes situées dans un plan coupant en deux le solénoïde dans le sens de la longueur. La FIG. 6.7 montre l'allure des lignes de champ. À l'intérieur de la bobine, les lignes sont quasiment parallèles ce qui traduit le caractère quasi-uniforme du champ. On montre que lorsque $L \rightarrow \infty$, le champ magnétique à l'intérieur est axial, uniforme et ne dépend que de l'intensité électrique et de la densité d'enroulement : $B_{int} = \mu_0 n I$.

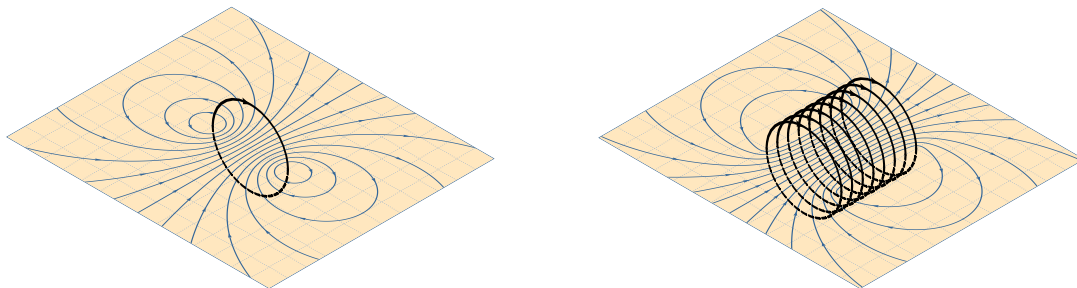


FIG. 6.7 : Cartes de champ d'une spire (à gauche) et d'un solénoïde (à droite).

À retenir

Pour un enroulement de spires, un tire-bouchon que l'on fait tourner dans le sens du courant électrique progresse dans le sens du champ magnétique au centre et correspond au sens sud-nord de l'aimant équivalent.

Symétries – Le champ magnétique ne présente pas les mêmes pro-

propriétés de symétrie que le champ électrique. En effet, la formule de Biot et Savart montre que le champ magnétique se transforme comme un produit vectoriel. On dit que le champ magnétique est un *vecteur axial* ou *pseudovecteur*.

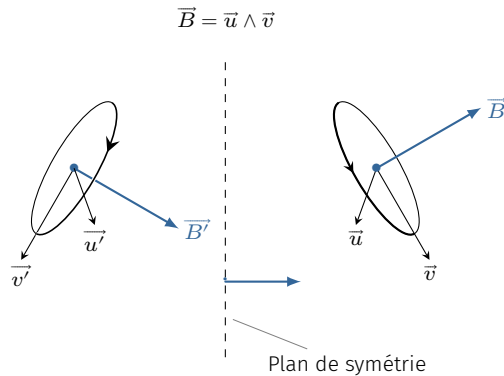


FIG. 6.8 : Transformation d'un vecteur axial par un plan de symétrie.

En présence d'un plan de symétrie, un vecteur normal² se transforme comme dans un miroir. En conséquence, le produit vectoriel de deux vecteurs normaux ne se transforme pas comme dans un miroir. Sur la FIG. 6.8, on voit que \vec{B} se transforme ainsi :

2 : On dit également vecteur polaire.

$$M \xrightarrow{\text{symétrie}} M' \text{ et } \vec{B}(M) \xrightarrow{\text{symétrie}} -\text{sym}\vec{B}(M)$$

En vertu du principe de Curie, si la distribution de courant est invariante par symétrie, l'opération de la symétrie ne doit pas changer la valeur du champ magnétique. Par conséquent

$$\vec{B}(M') = -\text{sym}\vec{B}(M) \quad \heartsuit \quad (6.2)$$

Cette propriété implique que **pour tout point M situé dans un plan de symétrie, le champ magnétique est obligatoirement perpendiculaire au plan de symétrie.**

On dit que la distribution présente un plan d'anti-symétrie \mathcal{P}' lorsque la distribution de courant est invariante par l'opération de symétrie de plan \mathcal{P}' suivi de l'inversion du sens des courants. Dans ce cas, en un point M de l'espace, le champ magnétique ne doit pas varier lorsque l'on effectue cette transformation (principe de Curie). Détaillons la transformation

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\text{symétrie}} & M' & \xrightarrow{\text{inversion}} & M' \\ \vec{B}(M) & \xrightarrow{\text{symétrie}} & -\text{sym}\vec{B}(M) & \xrightarrow{\text{inversion}} & \text{sym}\vec{B}(M) \end{array}$$

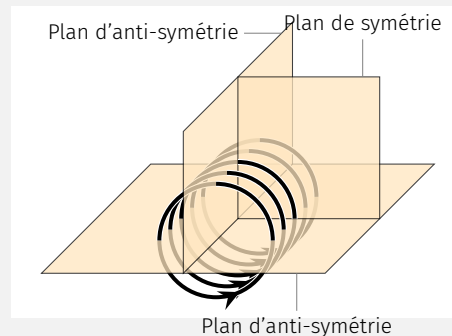
On en déduit que

$$\vec{B}(M') = \text{sym}\vec{B}(M) \quad \heartsuit \quad (6.3)$$

Cette propriété implique que **pour tout point M situé dans un plan d'anti-symétrie, le champ magnétique est obligatoirement contenu dans ce plan.**

Exemple

Identifions les plans de symétrie et d'anti-symétrie d'un solénoïde cylindrique (considéré comme un ensemble de spires parallèles).



Tout plan contenant l'axe du solénoïde est un plan d'anti-symétrie. Les lignes de champ doivent donc appartenir à ces plans. En conséquence, l'axe du solénoïde est nécessairement une ligne de champ. Par ailleurs, le plan perpendiculaire à l'axe du solénoïde et passant par le milieu du solénoïde est un plan de symétrie. Les lignes de champ doivent traverser ce plan à angle droit.

6.2 Champ créé par un dipôle magnétique

On cherche à déterminer l'expression du champ magnétique créé par un dipôle magnétique c'est-à-dire une distribution localisée de courant auquel on peut associer un moment magnétique \vec{m} . Nous verrons que loin du dipôle magnétique la structure du champ magnétique présente des analogies avec celui du champ électrique créé par un dipôle électrique.

Champ magnétique créé le long de l'axe d'une spire

Commençons par étudier le champ magnétique produit par une spire circulaire de rayon R parcouru par un courant permanent d'intensité I . Dans le cas général, le calcul fait appel aux intégrales elliptiques; on se contente ici d'étudier l'évolution du champ magnétique le long de l'axe (Oz) de la spire.

Tout d'abord, appelons θ le demi-angle au sommet du cône formé par la spire et un point M de l'axe. D'après la loi de Biot et Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

le champ $\vec{dB}(M)$, fait un angle $\pi/2 - \theta$ avec l'axe (Oz).

Par ailleurs, tout plan contenant l'axe de la spire est un plan d'anti-symétrie (il y en a une infinité). Il en résulte que le champ magnétique

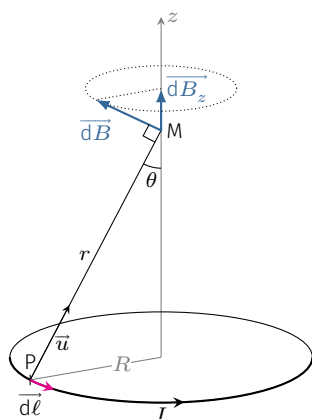


FIG. 6.9 : Calcul du champ magnétique produit sur l'axe d'une spire.

est nécessairement le long de l'axe pour les points M de cet axe. Il suffit dès lors de sommer toutes les composantes verticales des champs élémentaires :

$$dB_z = dB \cos(\pi/2 - \theta) \quad \text{avec} \quad dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \quad \text{soit} \quad dB_z = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2}$$

Lorsque le point P décrit le circuit fermé, l'angle θ , la distance r et l'intensité I restent constants :

$$B_z = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I R \sin \theta}{2r^2}$$

Finalement, compte tenu du fait que $\sin \theta = R/r$, le champ magnétique créé par une spire le long de son axe s'écrit

$$\vec{B}(M) = B_{\max} \sin^3 \theta \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad B_{\max} = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \heartsuit \quad (6.4)$$

B_{\max} représente le champ créé au centre de la spire.

Approximation dipolaire

À partir du résultat précédent, regardons maintenant comment le champ magnétique varie loin de la boucle de courant. Sachant que $\sin \theta = R/\sqrt{R^2 + z^2}$, on peut écrire le résultat précédent en fonction uniquement de la variable z :

$$B(M \in Oz) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Faisons intervenir le moment dipolaire de la spire, $m = \pi R^2 I$:

$$B(M \in Oz) = \frac{\mu_0 m}{2\pi} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Expression qui, loin de la spire, devient ($R^2 + z^2 \simeq z^2$)

$$B(M \in Oz) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{z^3} \quad \text{si} \quad z \gg R$$

Le champ magnétique décroît donc comme l'inverse du cube de la distance lorsque l'on se situe loin de la spire. Cette formule n'est pas sans rappeler l'évolution du champ électrique créé par un dipôle électrique le long de l'axe du dipôle. En effet, le champ créé par un dipôle électrique le long de son axe vaut, dans l'approximation dipolaire,

$$E_{\text{dipolaire}}(M \in Oz) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{z^3}$$

On retrouve l'analogie déjà rencontrée au chapitre précédent :

$$\left[\begin{array}{l} \vec{m} \leftrightarrow \vec{p} \\ \vec{B} \leftrightarrow \vec{E} \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \end{array} \right]$$

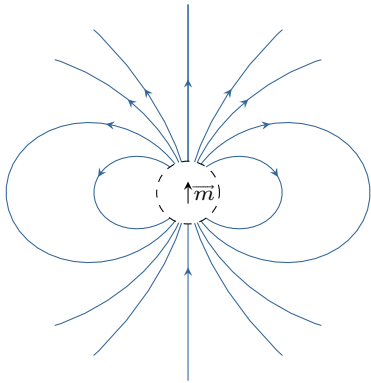


FIG. 6.10 : Lignes de champ magnétique produit par un dipôle magnétique dans l'approximation dipolaire.

On peut montrer que cette analogie fonctionne dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire dès que l'on se trouve loin du dipôle magnétique.

Approximation dipolaire

Le champ magnétique créé par un dipôle magnétique a la même structure que le champ électrique créé par un dipôle dès lors que l'on se place dans l'approximation dipolaire. On a

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m}]$$

Origines du magnétisme

Géomagnétisme – La Terre produit un champ magnétique de l'ordre de $10 \mu\text{T}$. Ce champ est de nature dipolaire et peut s'interpréter comme lié à l'existence d'un dipôle magnétique au centre de la Terre de moment magnétique $m \approx 10^{23} \text{ A.m}^2$ et dont l'axe est quasi-aligné avec l'axe des pôles. Le dipôle pointe vers le Sud géographique de telle sorte qu'une boussole à la surface de la Terre indiquera le Nord Géographique. Autrement dit, le Nord géographique est un pôle sud magnétique.

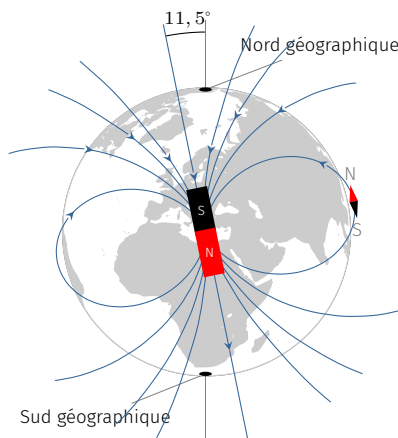


FIG. 6.11 : Champ magnétique terrestre

En réalité, l'axe nord-sud magnétique n'est pas confondu avec l'axe Sud-Nord géographique. Il est incliné de $11,5^\circ$ et subit quelques fluctuations journalières. Ce fait reste encore énigmatique pour les théoriciens. Il est des astres où la configuration est encore plus exotique : par exemple, sur Neptune l'axe fait 90° avec l'axe de rotation !

L'étude de l'évolution du magnétisme terrestre (paléomagnétisme) soulève encore quelques énigmes. Par exemple l'inversion du champ magnétique terrestre ne se produit pas régulièrement (la dernière remonte à 800 000 ans) alors que le champ magnétique solaire s'inverse lui à une cadence régulière ; tous les 11 ans.

Le magnétisme des aimants – C'est Ampère qui, le premier, pressentit que le magnétisme des aimants tenait son origine dans l'existence de minuscules boucles de courants au sein des molécules de la matière. Il a fallu attendre les découvertes du XX^e siècle sur l'atome pour confirmer l'intuition d'Ampère. En effet, de nos jours, on sait que certains atomes (ou molécules) possèdent un moment dipolaire magnétique du fait de leur structure électronique. Dans un matériau non aimanté, les moments dipolaires sont orientés de façon aléatoires de sorte que les effets s'annihilent. C'est la situation que l'on rencontre quand le matériau est non aimanté ou trop chaud, l'agitation thermique étant alors responsable de ce désordre.

En revanche, dans un aimant, les moments microscopiques tendent à s'aligner grâce à une interaction d'origine quantique (on parle de couplage ferromagnétique) et parce que l'agitation thermique n'est pas trop importante. Dans ce cas, l'aimant présente un moment magnétique macroscopique suffisamment important pour créer un fort champ magnétique. Bien entendu, lorsqu'on chauffe l'aimant au delà

d'une certaine température (dite température critique), l'ordre ferromagnétique est rompu et l'aimant perd son aimantation.

Cette description permet de comprendre une expérience qui remonte au XIII^e siècle : l'expérience de l'aimant brisée. Si l'on coupe un aimant en deux, on se retrouve avec deux nouveaux aimants possédant chacun un pôle nord et un pôle sud. Autrement dit, il est impossible d'isoler un seul pôle magnétique.

Relation entre structure électronique et magnétisme

Le magnétisme des atomes est essentiellement dû au mouvement électronique. En effet, imaginons un électron de masse m_e décrivant une orbite circulaire de rayon r à la vitesse v autour du noyau avec lequel il est en interaction. On peut considérer qu'il s'agit d'une boucle de courant de rayon r et de courant $I = e/T$ où T représente la période orbitale du mouvement. Sachant que $T = 2\pi r/v$, le moment magnétique de cette « boucle de courant » vaut donc

$$m = \pi r^2 I = \pi r^2 \frac{ev}{2\pi r} = \frac{evr}{2}$$

L'électron ainsi en mouvement présente également un moment cinétique orbital $L_O = m_e vr$ de sorte qu'il y a proportionnalité entre le moment magnétique et le moment orbital.

$$m = \gamma_0 L \quad \text{avec} \quad \gamma_0 = \frac{e}{2m_e} \quad (6.5)$$

Le facteur γ_0 porte le nom de facteur gyromagnétique. On peut montrer que tout modèle classique conduit à ce résultat quel que soit le mouvement de l'électron. Le noyau présente également un moment magnétique mais sa masse étant plus de mille fois supérieure à celle de l'électron, le facteur gyromagnétique nucléaire est négligeable devant celui de l'électron de sorte que le moment magnétique de l'atome est essentiellement dû au mouvement des électrons.

La description classique que l'on vient de voir n'est hélas pas en accord avec l'expérience et seule une description quantique parvient à appréhender complètement les phénomènes magnétiques. Par exemple, on s'est rendu compte que l'électron possédait un moment cinétique propre dit **moment cinétique de spin** L_s . Pour prendre une image classique, l'électron est comme une petite boule chargée en rotation sur elle-même et possède donc également un moment magnétique lié à son spin. Là s'arrête l'analogie classique, car la relation entre le moment magnétique et le moment cinétique de spin ne vérifie pas l'équation (6.5). On obtient plutôt

$$m_s = g\gamma_0 L_s \quad \text{avec} \quad g \simeq 2 \quad (6.6)$$

avec g un paramètre sans dimension, appelé facteur de Landé, dont la valeur expérimentale est en accord avec les calculs d'électrodynamique quantique.

Finalement, on retiendra que les propriétés magnétiques de l'atome sont essentiellement gouvernées par la façon dont les moments cinétiques orbitaux et de spin des électrons se composent.

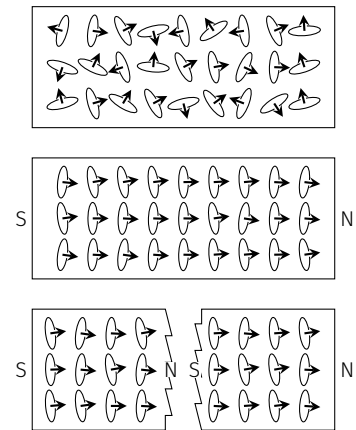


FIG. 6.12 : Origine du magnétisme des aimants - Expérience de l'aimant brisée.

ANNEXES

Calcul de l'action magnétique subie par une spire circulaire

A

Dans le [Chapitre 5](#) nous avons établi les lois qui régissent le comportement d'un dipôle magnétique stationnaire dans un champ magnétique extérieur. Nous proposons ici une autre démonstration, reposant sur le calcul direct de la résultante des forces de Laplace et de leur moment dans le cas particulier d'une boucle de courant circulaire dans un champ magnétique uniforme.

Considérons une spire de rayon R de centre O et d'axe (Oz), parcourue par un courant d'intensité I en présence d'un champ magnétique uniforme

$$\vec{B}^{\text{ext}} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

Il produit en un point P de la spire, une force de Laplace $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}$. Repérons P par son angle polaire θ . On a

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad d\vec{\ell} = d\vec{OP} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta d\theta \\ R \cos \theta d\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

La force de Laplace au point P vaut donc

$$d\vec{F} = IR d\theta \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = IR d\theta \begin{pmatrix} B_z \cos \theta \\ B_z \sin \theta \\ -\sin \theta B_y - \cos \theta B_x \end{pmatrix}$$

On voit immédiatement qu'en intégrant cette force le long de la spire, on obtient une résultante nulle puisque $\oint \sin \theta d\theta = \oint \cos \theta d\theta = 0$.

Résultante des forces magnétiques

Une spire circulaire de courant en présence d'un champ magnétique uniforme ressent une résultante des forces magnétiques nulle. Ce résultat se généralise à toute boucle de courant stationnaire.

Calculons maintenant le moment $\vec{\Gamma}^1$ des forces magnétiques. Une portion de spire subit un moment magnétique par rapport au centre de la spire qui vaut

$$d\vec{\Gamma} = \vec{OP} \wedge d\vec{F} = IR^2 d\theta \begin{pmatrix} -\sin^2 \theta B_y - \sin \theta \cos \theta B_x \\ \cos^2 \theta B_x + \sin \theta \cos \theta B_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il ne nous reste plus qu'à intégrer le long de la spire. En utilisant $\oint \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$ et $\oint \sin^2 \theta d\theta = \oint \cos^2 \theta d\theta = \pi$, on obtient

$$\vec{\Gamma} = (\pi R^2) I \begin{pmatrix} -B_y \\ B_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

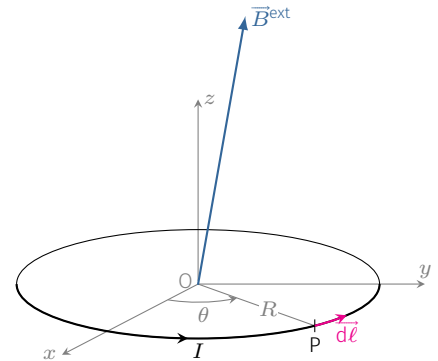


FIG. A.1 : Spire circulaire en présence d'un champ magnétique extérieur.

1 : Rappelons que l'on parle de couple lorsqu'un système de forces a une résultante nulle. On note traditionnellement $\vec{\Gamma}$ le moment résultant, lequel ne dépend pas du point par rapport auquel on le calcule (voir [5]).

Or on a $\vec{u}_z \wedge \vec{B}^{\text{ext}} = \begin{pmatrix} -B_y \\ B_x \\ 0 \end{pmatrix}$. On peut donc écrire le moment des forces magnétiques sur la spire par :

$$\vec{\Gamma} = I (\pi R^2) \vec{u}_z \wedge \vec{B}^{\text{ext}} = \vec{m} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}$$

Où \vec{m} est le moment magnétique de la spire.

Moment d'orientation

Une spire circulaire de courant en présence d'un champ magnétique uniforme ressent un moment des forces donné par la relation

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}$$

Ce couple magnétique tend à orienter le moment magnétique dans le sens du champ magnétique imposé.

Pour en savoir plus

- [1] Christine BLONDEL et Bertrand WOLFF. *De l'électricité "en + ou en -" de Franklin aux lois de l'électricité*. 2008. (Visité le 06/2008) (cf. p. 4).
- [2] John David JACKSON, Christian JEANMOUGIN et Jean-Pol VIGNERON. *Electrodynamique classique : cours et exercices d'électromagnétisme*. Dunod, 2001 (cf. p. 20).
- [3] Lucas BEGUIN et al. « Direct measurement of the van der Waals interaction between two Rydberg atoms ». In : *Physical review letters* 110.26 (2013), p. 263201 (cf. p. 26).
- [4] R. de BRUYN OUBOTER. « Kamerlingh Onnes découvre la supraconduction ». In : *Pour la science* 235 (mai 1997) (cf. p. 31).
- [5] J. ROUSSEL. *Théorème du moment cinétique*. Sept. 2014. URL : <https://femto-physique.fr/mecanique/> (cf. p. 65).
- [6] Jean PÉRICART. *Cours d'électricité théorique, Tome 1 : Electrostatique - Electrocinétique*. 1962.

Grandeurs physiques et symboles mathématiques

Constantes physiques définies par le SI (valeurs exactes)

h	Constante de Planck	$6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$
c	Vitesse de la lumière dans le vide	$299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	Fréquence hyperfine du ^{133}Cs	$9\,192\,631\,770 \text{ Hz}$
e	Charge élémentaire	$1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$
k_{B}	Constante de Boltzmann	$1,380\,649 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
N_{A}	Nombre d'Avogadro	$6,022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
$R = k_{\text{B}}N_{\text{A}}$	Constante des gaz parfaits	$8,314\,462\,618 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
K_{cd}	Efficacité lumineuse	$683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$

Autres constantes physiques

G	Constante gravitationnelle	$6,67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
ϵ_0	Permittivité diélectrique du vide	$8,85418781 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
μ_0	Perméabilité magnétique du vide	$1,256637062 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
m_{e}	Masse de l'électron au repos	$9,10938370 \times 10^{-31} \text{ kg}$
m_{p}	Masse du proton au repos	$1,672621923 \times 10^{-27} \text{ kg}$
m_{n}	Masse du neutron au repos	$1,674927498 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Grandeurs physiques

α	Polarisabilité (m^3)
γ	Conductivité électrique ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$)
λ	Densité linéique de charge ($\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$)
\mathcal{E}	Energie (J)
\mathcal{P}	Puissance (W)
\mathcal{V}	Volume (sa mesure en m^3)
μ	Mobilité électrique (T^{-1})
ν	Fréquence (Hz)
ω	Vitesse angulaire, pulsation ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
$\vec{\Gamma}$	Moment d'un couple (N.m)

$\vec{\mu}$	Moment dipolaire magnétique (A.m ²)
\vec{B}	Champ magnétique (T)
\vec{E}	Champ électrique (V.m ⁻¹)
\vec{f}, \vec{F}	force, résultante des forces (N)
\vec{j}_e	Densité de courant électrique (A.m ⁻²)
\vec{p}	Moment dipolaire électrique (C.m)
\vec{p}	Quantité de mouvement (kg.m.s ⁻¹)
\vec{v}	Vitesse (m.s ⁻¹)
ϕ_B	Flux magnétique (Wb)
ϕ_E	Flux électrique (V.m)
ρ_e	Densité volumique de charge (C.m ⁻³)
σ_e	Densité surfacique de charge (C.m ⁻²)
C	Capacité électrique (F)
e	Force électromotrice (V)
i, I	Intensité électrique (A)
L	Auto-inductance (H)
m	Masse (kg)
n	Densité de particules (m ⁻³)
q, Q	Charge électrique (C)
R	Rayon de courbure (m)
R, r	Résistance électrique (Ω)
R_H	Constante de Hall (m ³ .C ⁻¹)
S	Surface (sa mesure en m ²)
T	Période (s)
T	Température (K)
t	Temps (s)
u ou U	Tension électrique (V)
V	Potentiel électrique (V)
W	Travail (J)
w	Densité d'énergie (J.m ⁻³)
ϵ_r	Permittivité diélectrique relative (sans unité)

Symboles mathématiques

$\stackrel{\text{def}}{=}$	Relation de définition
\sim	Égal en ordre de grandeur
$A \gg B$	A très grand devant B
$A \ll B$	A très petit devant B
\bar{f}	Moyenne temporelle de $f(t)$
$\langle f \rangle$	Moyenne d'ensemble de f
$\frac{df}{dt}$	Dérivée première par rapport au temps
$\frac{d^n f}{dt^n}$	Dérivée n-ième par rapport au temps
$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$	Base cartésienne
(r, θ, z)	Coordonnées cylindriques
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$	Base cylindrique
(r, θ, φ)	Coordonnées sphériques
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$	Base sphérique
A_z	Composante suivant l'axe (Oz) : $A_z = \vec{A} \cdot \vec{u}_z$
$\int_{\mathcal{D}}$	Intégration sur un domaine \mathcal{D}
$\int_C \vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell}$	Circulation de \vec{A} le long du circuit C
$\iint_S \vec{A}(M) \cdot \vec{n} dS$	Flux d'un champ vectoriel \vec{A}
$\iiint_V f(M) d\tau$	Intégrale de volume
$\overrightarrow{\text{grad}}f$ ou $\vec{\nabla}f$	Gradient d'un champ scalaire
$\text{div}\vec{A}$ ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	Divergence d'un champ vectoriel
$\text{rot}\vec{A}$ ou $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$	Rotationne d'un champ vectoriel
$\Delta f = \nabla^2 f$	Laplacien scalaire
$\sum_{\text{couples } (i,j)} = \sum_i \sum_{j < i}$	Somme sur les couples (i, j) avec $i \neq j$



2026