

COURS DE PHYSIQUE

ÉLECTROMAGNÉTISME

JIMMY ROUSSEL

2023

Cours d'électromagnétisme – femto-physique.fr

JIMMY ROUSSEL, professeur agrégé à l'Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Rennes

Copyright © 2023 Jimmy Roussel

 Ce document est sous licence *Creative Commons* «Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 4.0 International (CC BY-NC 4.0)».

Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Ce document est réalisé avec l'aide de *KOMA-Script* et \LaTeX en utilisant la classe *kaobook*.

1^{re} édition – Nov. 2015

Version en ligne – femto-physique.fr/electromagnetisme

Préface

Ce cours a pour objectif d'introduire les phénomènes électromagnétiques dans le vide et dans la matière. La première partie se concentre sur les phénomènes stationnaires, pour lesquels les effets magnétiques et électriques sont découplés. Dans la deuxième partie on s'intéresse au phénomène d'induction et aux équations de Maxwell, dont une conséquence importante est l'existence d'ondes électromagnétiques dans le vide. Enfin, une dernière partie est consacrée aux phénomènes électromagnétiques dans la matière.

Ce cours s'adresse plus particulièrement à des étudiants de premier cycle universitaire ou élèves des CPGE. Les candidats au CAPES ou à l'Agrégation peuvent y trouver également matière à réflexion.

J'ai essayé le plus possible d'illustrer les différentes notions par des exemples ou de simples exercices. Mais pour un entraînement plus poussé, j'invite le lecteur à se procurer le eBook suivant :

- ▶ *Électromagnétisme 1^{re} Partie – 83 exercices et problèmes corrigés*;

disponibles à l'adresse payhip.com/femto

Remarque : ce recueil est en cours d'élaboration ce qui explique la présence de certains chapitres encore inactifs.

Jimmy Roussel

Table des matières

Preface	iii
Table des matières	v
1^{RE} PARTIE – ÉLECTROSTATIQUE ET MAGNÉTOSTATIQUE	1
1 INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE	3
1.1 Loi de Coulomb	3
1.2 Le champ électrique	6
2 POTENTIEL ET ÉNERGIE ÉLECTRIQUES	11
2.1 Potentiel électrostatique	11
2.2 L'énergie électrostatique	15
3 LE DIPÔLE ÉLECTRIQUE	19
3.1 L'approximation dipolaire	19
3.2 Interactions dipolaires	24
4 CONDUCTEURS ÉLECTRIQUES	29
4.1 Conduction électrique	29
4.2 Conducteurs en équilibre électrostatique	33
4.3 Notion de capacité	37
5 INTERACTIONS MAGNÉTIQUES	43
5.1 Les aimants	43
5.2 Force de Lorentz	44
5.3 Interaction magnétique avec les courants électriques	49
6 CHAMP B CRÉÉ PAR DES COURANTS ÉLECTRIQUES	55
6.1 Loi de Biot et Savart	55
6.2 Champ créé par un dipôle magnétique	60
2^E PARTIE – ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE	65
7 PROPRIÉTÉS LOCALES DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE	67
7.1 Théorème de Gauss	67
7.2 Circulation du champ électrostatique	74
7.3 Potentiel électrique	78
7.4 Énergie électrostatique	84
8 PROPRIÉTÉS DU CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE	89
8.1 Théorème d'Ampère	89
8.2 Flux du champ magnétostatique	93
8.3 Potentiel vecteur	95
8.4 Relations de passage du champ magnétique	99
8.5 Résumé	102

9	INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE	105
9.1	Approche historique	105
9.2	Origine de l'induction de Lorentz	110
9.3	Induction de Neumann	115
9.4	Bilan et discussions	118
10	ÉQUATIONS DE MAXWELL	121
10.1	Lois générales de l'électromagnétisme	121
10.2	Résolution des équations de Maxwell	125
11	LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE	129
11.1	Propagation du champ dans le vide	129
11.2	Propagation unidimensionnelle	133
11.3	Polarisation	137
12	ENERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE	143
	ANNEXES	145
A	Calcul de l'action magnétique subie par une spire circulaire	147
B	Calcul numérique de l'inductance d'une bobine	149
B.1	Couplage entre deux spires	149
B.2	Applications aux solénoïdes	152
	Références	155
	Grandeurs physiques et symboles mathématiques	157

Table des figures

1.1	Expérience 1	4
1.2	Plus la baguette se rapproche de l'électroscope, plus les aiguilles s'écartent.	4
1.3	Répulsion ou attraction électrostatique	4
1.4	Expérience de Coulomb	5
1.5	Distribution de N charges q_i placées en P_i	6
1.6	Ligne de champ \mathcal{C}	7
1.7	Carte de champ d'une charge ponctuelle positive.	7
1.11	Distribution présentant un plan d'anti-symétrie.	8
1.8	Carte de champ d'un doublet électrostatique.	8
1.9	Carte de champ d'un système de 2 charges positives.	8
1.10	Distribution présentant un plan de symétrie.	8
1.12	Calcul du champ créé par un segment chargé	10
2.1	Travail de la force électrostatique.	11
2.3	Les équipotentiels coupent les lignes de champ à angle droit.	14
2.2	Représentations d'un champ scalaire.	14
2.4	Distribution de N charges ponctuelles.	16
3.1	Doublet électrostatique	19
3.2	Distribution de N charges ponctuelles.	20
3.3	Lignes de champ et équipotentiels créées par un dipôle.	24
3.5	Profil énergétique	25
3.4	Dipôle rigide dans un champ uniforme.	25
3.6	Potentiel de Lennard-Jones.	28
4.1	Calcul du débit de charge traversant une section.	30
4.2	Modèle de Drude.	31
4.3	Cylindre conducteur.	32
4.4	Champ au voisinage de la surface d'un conducteur.	34
4.5	Flux du champ électrique d'une charge ponctuelle à travers une sphère	35
4.6	Influence partielle. ©2004 Thomson - Brooks/Cole	39
4.7	Effets de bords d'un condensateur plan	40
4.8	Fabrication d'un condensateur plan réel	40
5.1	Aiguille aimantée	43
5.2	Interactions entre aimants.	43
5.3	Spectre magnétique	44
5.5	Force magnétique.	45
5.4	Déflexion magnétique.	45
5.6	Mouvement hélicoïdal d'une particule dans un champ magnétique	46
5.7	Principe du cyclotron (la charge est négative ici).	47
5.8	Principe du spectromètre de masse	48
5.9	Notations pour la force de Laplace.	49
5.10	Effet Hall	50
5.11	Circuit électrique rectangulaire en mouvement dans un champ magnétique.	51
5.12	Illustration de la règle du flux maximum.	53
5.13	Moment dipolaire magnétique	53

5.14	Dipôle rigide dans un champ uniforme.	53
6.1	Expérience d'Ørsted.	55
6.2	Expériences d'Ampère.	55
6.4	Notations utilisées dans la loi de Biot et Savart.	56
6.3	Expérience de Rowland	56
6.5	Champ magnétique créé par un fil rectiligne infini.	57
6.6	Champ magnétique créé par un fil infini.	58
6.7	Cartes de champ d'une spire (à gauche) et d'un solénoïde (à droite).	58
6.8	Transformation d'un vecteur axial par un plan de symétrie.	59
6.9	Calcul du champ magnétique produit sur l'axe d'une spire.	60
6.10	Carte de champ d'un dipôle magnétique dans l'approximation dipolaire	62
6.11	Champ magnétique terrestre	62
6.12	Origine du magnétisme des aimants - Expérience de l'aimant brisée.	63
7.1	Le flux du champ électrique à travers S est nul ici.	67
7.2	Le flux est-il toujours nul?	68
7.3	Le flux à travers une surface fermée est nul si la charge est à l'extérieur	68
7.4	Le flux du champ électrique à travers S est le même que celui à travers S'.	68
7.5	Fil rectiligne infini et uniformément chargé de densité linéique λ	70
7.6	Calcul du flux à travers un cylindre fermé.	70
7.7	Calcul du flux à travers un cube.	71
7.8	Flux à travers deux cubes adjacents	71
7.9	Interface chargée séparant deux milieux différents notés 1 et 2.	73
7.10	Nappe d'épaisseur $2a$, chargée uniformément en volume.	74
7.11	Evolution du champ électrique $E(x)$	74
7.12	Circulation du champ électrique le long d'un circuit fermé orienté.	75
7.13	Circulation le long d'un carré orienté d'arête a	76
7.14	2 contours cote à cote.	76
7.15	Théorème de Stokes	77
7.16	Contour rectangulaire coupant la surface chargée perpendiculairement.	78
7.17	Boule de rayon a , uniformément chargée.	80
7.18	Cavité dans un conducteur chargé à l'équilibre.	82
7.19	Méthode des images électriques	82
7.20	Influence d'une charge sur une plaque conductrice	83
7.21	Distribution de N charges ponctuelles.	84
7.22	Distribution formée de deux corps chargés.	87
8.1	Flux électrique.	89
8.2	Notations associées à la loi de Biot et Savart.	89
8.4	Fil infini rectiligne parcouru par un courant électrique permanent.	90
8.5	Circulation du champ magnétique à travers un circuit C orienté.	90
8.3	Tube de courant élémentaire	90
8.8	Circulation à calculer	91
8.6	Différents enlacements	91
8.7	Le courant enlacé est compté positivement ici.	91
8.9	Calcul du courant enlacé en termes de densité de courant.	92
8.10	Conducteur cylindrique parcouru par un courant axial.	92
8.11	Le flux magnétique ne dépend que du contour C et du champ magnétique.	94
8.12	Fil conducteur rectiligne de section non négligeable.	97
8.13	Nappe de courant.	99

8.14	Contour rectangulaire coupant une nappe de courant.	100
8.15	Solénoïde infini.	101
8.16	Enroulement solénoïdal.	102
9.1	Mickael Faraday (1791-1867)	105
9.2	Expériences 1 et 2 (le galvanomètre n'est pas représenté).	105
9.4	Heindrich Lenz (1804-1865)	106
9.3	Induction électromagnétique sans mouvement relatif entre inducteur et induit.	106
9.5	Orientation de la f.é.m et du courant induit	107
9.6	Cadre en mouvement uniforme dans un champ permanent.	107
9.7	Choix d'orientations.	107
9.8	Freinage électromagnétique.	108
9.9	Schéma de principe d'un alternateur à induit mobile.	109
9.10	Cadre en mouvement uniforme dans un champ permanent.	110
9.11	Expérience vue de dessus.	110
9.12	Accumulation des porteurs de charges aux extrémités de la barre.	111
9.13	Le courant circule dans le sens du champ électromoteur.	112
9.14	Le circuit balaye une surface Σ entre t et $t + dt$	112
9.15	Plaque conductrice en mouvement dans un champ magnétique uniforme.	113
9.16	Allure des courants de Foucault	114
9.17	Spire conductrice en présence d'un champ magnétique axial et variable.	116
9.18	Cylindre conducteur en présence d'un champ magnétique variable	117
9.19	Dans l'ARQS, $i_1(t) = i_2(t)$	119
9.20	Dans l'ARQS, $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0$	119
9.21	Une exception à la règle de Lenz-Faraday	120
10.1	James Clerk Maxwell (1831-1879) - © George J. Stodart, Public domain, via Wikimedia Commons	121
10.2	Volume V chargé, délimité par une surface fermée S	122
10.3	Condensateur se déchargeant. Ici q décroît au cours du temps.	123
10.4	Notations associées.	127
11.1	Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)	130
11.2	Simulation d'un signal de la forme $f(r - ct)/r$	131
11.3	«Aplatissement» des ondes sphériques.	132
11.4	Heinrich Rudolph Hertz (1857-1894)	132
11.5	Structure d'une onde plane.	134
11.6	Structure d'une onde plane harmonique (ici polarisée rectilignement suivant Oy).	135
11.7	Spectre électromagnétique.	135
11.8	Plan d'onde se propageant suivant \vec{u}	136
11.9	Polarisation rectiligne. L'extrémité du vecteur \vec{E} décrit le segment en pointillé.	138
11.10	Différentes polarisations en fonction du déphasage $\Delta\varphi = \varphi_z - \varphi_y$	139
11.11	Structure d'une onde plane harmonique polarisée circulairement (droite).	139
11.12	Lorsqu'on présente un Polaroid devant un écran LCD, on s'aperçoit que pour une certaine orientation du polaroid, aucune lumière n'est transmise : la lumière émise par un écran est polarisée rectilignement.	140
11.13	Élimination des reflets à la surface d'un extincteur à l'aide d'un polaroid.	141
11.14	Double réfraction à travers un cristal de calcite (©Fondo Antiquo de la Biblioteca de la Universidad de Sevilla)	142
A.1	Spire circulaire en présence d'un champ magnétique extérieur.	147
B.1	Deux spires en interaction.	149

B.2	Graphe des fonctions $K(x)$ et $E(x)$	150
B.3	Anneau conducteur. Vues en coupe et de dessus.	151
B.4	Bobine monocouche vue dans un plan contenant son axe de révolution. Ici $N = 24$	152
B.5	Bobine multi-couche. Ici $N_c = 3$	153

Liste des tableaux

2.1	Ordres de grandeur	15
3.1	Entités chimiques et types d'actions électriques produits.	22
3.2	Moments dipolaires des halogénures d'hydrogène.	22
4.1	Quelques ordres de grandeur	30
4.2	Ordres de grandeur de conductivités électriques.	31
4.3	Permittivités diélectriques relatives de quelques matériaux.	41
8.1	Résumé des propriétés des champs électrostatique et magnétostatique.	103

1^{RE} PARTIE – ÉLECTROSTATIQUE ET MAGNÉTOSTATIQUE

INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE

1

L'électromagnétisme consiste en l'étude des phénomènes qui font intervenir des charges en mouvement (courants électriques, antenne radio, conductimétrie, courants de Foucault,...). On se restreint, pour l'instant, aux phénomènes indépendants du temps ce qui permet de séparer l'étude des effets magnétiques et électriques. Ce cours aborde l'électrostatique, c'est-à-dire l'étude du champ électrique produit par des charges immobiles.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/interaction-electrostatique.php>

1.1 Loi de Coulomb	3
Quelques faits	3
Notion de charge électrique	4
Loi de Coulomb	5
1.2 Le champ électrique	6
Cas d'un système de charges	6
Topographie - Symétrie	7
Distribution continue	9

1.1 Loi de Coulomb

Quelques faits expérimentaux

Les premières observations – Il y a plus de 2 600 ans, les savants grecs avaient déjà constaté que l'ambre jaune (une résine naturelle) frottée énergiquement avec une fourrure avait la faculté d'attirer les corps légers tels que les cheveux ou fétus de paille. C'est d'ailleurs le mot grec *ηλεκτρον*¹, signifiant ambre, qui est à l'origine du terme «électricité»². Cette électrisation par frottement, dite *triboélectricité*, s'observe facilement dans la vie quotidienne. Parfois une forte électrisation peut même produire des étincelles comme lorsqu'on enlève un pull de laine rapidement (à condition d'être dans une pièce sombre pour percevoir ces étincelles). L'éclair, lors d'un orage, est un phénomène d'électricité statique impressionnant qui fut longtemps craint par les hommes. Il fallut attendre B. Franklin en 1752 pour identifier la nature électrique du phénomène et pour maîtriser les dégâts du tonnerre par l'invention du paratonnerre.

Les deux formes de l'électricité – C'est Charles du Fay qui observa les deux formes d'électricité. On peut mettre en évidence ces deux formes par les expériences suivantes.

Expérience 1 Un pendule électrostatique est constitué d'une bille de polystyrène recouverte d'une feuille d'aluminium suspendue à une potence par un fil. Lorsqu'on approche une baguette électrisée du pendule, la bille est attirée par la baguette. Après contact avec la baguette, elle est repoussée.

Expérience 2 Si on électrise un pendule électrostatique par contact avec une baguette chargée, et que l'on approche successivement d'autres baguettes électrisées, on s'aperçoit que la boule du pendule est soit attirée, soit repoussée par les diverses baguettes. On peut donc en déduire qu'il existe deux types de forces électriques.

1 : *ēlektron*

2 : Terme introduit en 1600 par William Gilbert dans son ouvrage *De Magnete*.

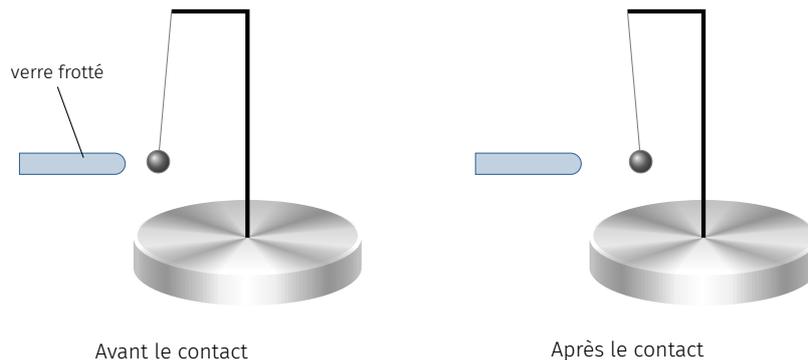


FIG. 1.1 : Expérience 1

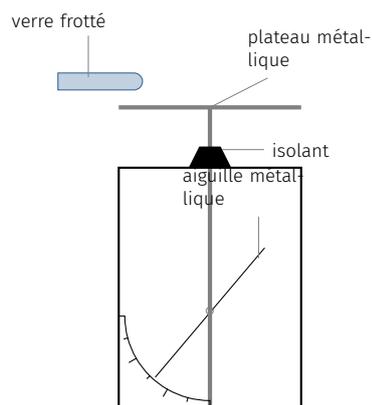


FIG. 1.2 : Plus la baguette se rapproche de l'électroscope, plus les aiguilles s'écartent.

Électrisation par influence –

Expérience 3 Un électroscope est constitué d'une tige métallique à laquelle on fixe une aiguille métallique pouvant librement tourner autour d'un axe. On fixe parfois deux feuilles très fines en or ou en aluminium. L'ensemble est placé dans une enceinte transparente et isolante (verre). Lorsqu'on approche une baguette électrisée de l'électroscope (sans le toucher), l'aiguille s'écarte de la verticale. Si on éloigne la baguette, l'aiguille retrouve sa position verticale de repos. Il y a électrisation de la tige et de l'aiguille sans contact, seulement par influence.

Notion de charge électrique

Jusqu'au XVIII^e siècle, l'électricité est une science essentiellement qualitative et il faut attendre le début du XIX^e siècle pour qu'une théorie mathématique de l'électricité émerge : c'est l'électrostatique. La notion de charge électrique algébrique s'est imposée au fil du temps car elle permettait de décrire correctement les phénomènes. De nos jours, on admet les hypothèses suivantes.

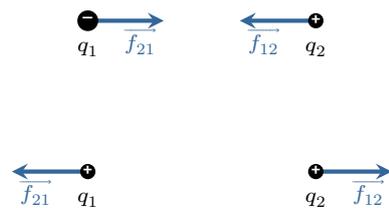


FIG. 1.3 : Répulsion ou attraction électrostatique

1. La matière est constituée de particules que l'on peut caractériser par une propriété scalaire, noté q et désignant la **charge électrique**. Cette charge est positive, négative ou nulle (on parle de particule neutre dans ce cas).
2. Deux particules possédant une électricité de même nature, c'est-à-dire une charge de même signe, se repoussent; elles s'attirent dans le cas contraire.
3. La charge étant caractéristique de la matière, elle ne dépend pas du référentiel.
4. Par ailleurs, la charge électrique d'un système isolé se conserve.
5. Enfin, Millikan a montré en 1906 (Prix Nobel 1923) que la charge électrique est quantifiée. C'est en étudiant la chute de microscopiques gouttes d'huile électrisées, entre les armatures d'un condensateur, qu'il mit en évidence le caractère discontinu de la charge :

$$q = Ne \quad \text{avec} \quad N \in \mathbb{Z}$$

où e désigne la **charge élémentaire**. De nos jours, on sait que ce caractère granulaire de la charge trouve son origine dans la structure atomique de la matière : tout corps matériel est

constitué d'atomes eux même formés d'un noyau chargé positivement (découvert en 1911 par Rutherford) autour duquel «gravitent» des électrons, particules élémentaires possédant toutes la même charge $q_e = -e$. La plupart des phénomènes électriques sont liés à un déplacement et/ou apport et/ou retrait d'électrons à la matière.

Le concept de charge permet d'expliquer les différents expériences décrites précédemment :

Expérience 1 Lorsqu'on approche la baguette électrisée de la sphère métallique, les électrons libres du métal sont attirés par le verre chargé positivement, laissant derrière eux des charges positives. Bien que la charge globale reste nulle, la force résultante est attractive : en effet, l'attraction entre les électrons et le verre l'emporte sur la répulsion entre les charges positives du conducteur et le verre. Après un contact, quelques électrons sont transférés sur la baguette en verre ce qui rend la sphère métallique globalement positive d'où la répulsion observée³.

Expérience 2 Le frottement d'un corps sur un autre induit un transfert d'électrons dans un sens qui dépend des corps frottés l'un contre l'autre. C'est pourquoi, il est possible d'électriser positivement ou négativement une baguette. On peut donc produire une répulsion ou une attraction.

Expérience 3 Les charges positives du verre électrisé attirent les électrons libres du plateau métallique faisant apparaître au niveau de l'aiguille et de la tige métallique un défaut d'électrons (des charges +). L'aiguille métallique est alors d'autant plus repoussée par la tige qu'elle est chargée. La rotation de l'aiguille est donc d'autant plus importante que la baguette se rapproche.

Loi de Coulomb

À la fin du XVIII^e siècle, l'idée que les charges produisent une force de type newtonien (en $1/r^2$) était une hypothèse séduisante mais difficile à prouver expérimentalement.

L'expérience de Coulomb – C'est en 1785 que Coulomb⁴ met en évidence, à l'aide d'une balance de torsion qu'il a réalisée lui-même, la loi qui porte désormais son nom. L'expérience consiste à fixer une boule de sureau B à l'extrémité d'une tige isolante, suspendue en son milieu à un fil d'argent dont on peut contrôler l'angle de torsion. Ce système étant au repos, on approche une autre boule A tenue par une tige isolante au contact de la boule B. Ensuite, on électrise les deux boules simultanément de sorte qu'elle acquièrent la même charge Q . La boule A est maintenue en place et la boule B s'éloigne sous l'action de la force électrique. À l'équilibre, le moment de la force électrique compense le couple de torsion. Il suffit ensuite d'augmenter, de façon contrôlée, la torsion du fil pour rapprocher les boules et mesurer la force pour des distances plus faibles. C'est ainsi que Coulomb trouva que la force électrique varie en $1/r^2$.

Pour résumer, la force électrique - dite aussi *force coulombienne* - entre deux charges ponctuelles immobiles dans le vide varie comme

3 : Il faut quand même signaler que lorsque l'expérience est réalisée avec une baguette faiblement électrisée, la sphère conductrice vient s'y coller sans être ensuite repoussée : c'est le phénomène d'adhérence électrique. En revanche si la baguette est suffisamment chargée, la pression entre les deux corps est plus forte ce qui favorise un transfert d'électrons. À l'extrême, lorsque le verre est fortement chargée, le transfert de charge s'effectue sans qu'il y ait contact, mais par un simple effet de pointe (cf. le Chapitre 4 sur les conducteurs)

4 : **Charles-Augustin Coulomb (1736-1806)** : ingénieur militaire français et fin expérimentateur distingué par l'Académie des Sciences. Il est connu pour ses travaux sur l'électricité et le magnétisme, son invention du pendule de torsion et ses travaux sur les frottements.

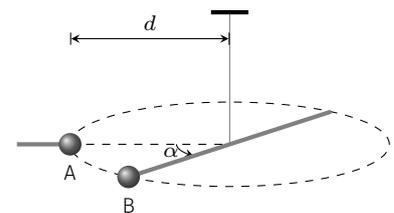


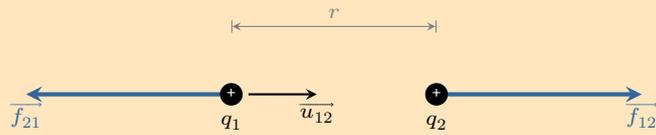
FIG. 1.4 : Expérience de Coulomb

l'inverse du carré de la distance qui les sépare et dépend de leur quantité de charge.

Histoire

Les résultats de Coulomb furent contestés en son temps et il faudra une vingtaine d'années pour que la loi en $1/r^2$ s'impose partout, plus pour la validité de ses conséquences que par les mesures de Coulomb. L'histoire a finalement retenu la démonstration expérimentale de Coulomb. Cependant, il ne faudrait pas oublier la contribution de Cavendish, un brillant expérimentateur, qui, avant Coulomb, a réussi à montrer de façon fort élégante que l'interaction électrique pouvait se décrire par une force en $1/r^n$ avec $n = 2,00 \pm 0,04$; résultat beaucoup plus précis que celui de Coulomb[1].

Loi de Coulomb



$$\vec{f}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} \quad (1.1)$$

où \vec{u}_{12} est un vecteur unitaire. Dans le Système International d'Unités, les charges s'expriment en coulomb (symbole : C) et la constante K vaut

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9,0 \cdot 10^9 \text{ m.F}^{-1}$$

où ϵ_0 désigne la *permittivité diélectrique du vide*.

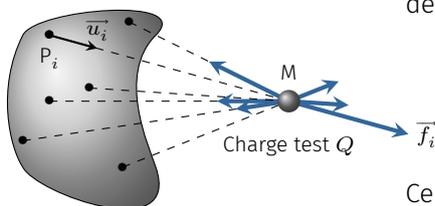
Exercice – Dans l'atome d'hydrogène, comparer la force électrique que ressent l'électron de la part du proton avec la force gravitationnelle. On donne la charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, la masse de l'électron $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et la masse du proton $m_p = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Rép. Le rapport de la force électrique sur la force gravitationnelle vaut environ $2 \cdot 10^{39}$

1.2 Le champ électrique

Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

Considérons une distribution de charges ponctuelles (q_1, \dots, q_N) placées en différents points $P_{i=1 \dots N}$ et une charge test Q placée en M . Cherchons à exprimer la force qu'exerce cette ensemble de charges sur la charge test. On admet que l'interaction électrique obéit au principe de superposition : la force résultante est *la somme vectorielle* des forces qu'exercent chacune des charges q_i sur la charge Q soit



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i = \sum_{i=1}^N \frac{Q q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i \quad \text{avec} \quad r_i = P_i M$$

Ce qui permet d'écrire

$$\vec{F} = Q \vec{E}(M) \quad \text{avec} \quad \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i \quad \heartsuit \quad (1.2)$$

FIG. 1.5 : Distribution de N charges q_i placées en P_i .

5 : Ce champ diverge lorsque $M = P_i$. Cette divergence provient d'une modélisation qui n'est plus valide dès que l'on s'approche de trop près des charges : la charge ponctuelle n'existe pas en réalité, il faut reconsidérer la modélisation dans ce cas.

Où $\vec{E}(M)$ désigne le champ électrique créé en M par la distribution de charges. Ce vecteur est défini en tout point de l'espace⁵ : il s'agit d'un **champ vectoriel**. On peut voir $\vec{E}(M)$ comme une propriété locale de

l'espace. Notez que lorsque l'on change la charge q_i en q'_i cela modifie le champ électrique en M mais de façon non instantané. On verra que toute perturbation électromagnétique se propage à la vitesse de la lumière dans le vide.

Ordre de grandeur – Dans le Système international d'unités, l'intensité du champ électrique se mesure en **volt par mètre** (symbole $V \cdot m^{-1}$). Le champ à la surface de la Terre vaut environ 100-150 V/m en dehors des périodes d'orage. En période d'orage, le champ terrestre est inversé et est de l'ordre de 10 kV/m. Il peut même atteindre 100 kV/m près des pointes conductrices. La lumière solaire qui nous arrive sur Terre est une **onde électromagnétique** : le champ électrique de l'onde est de l'ordre de (en valeur efficace) 1000 V/m. Dans l'atome, la cohésion est assurée grâce à des champs électriques énormes, de l'ordre de 100 GV/m.

Topographie - Symétrie

Décrivons différentes situations pour dégager quelques propriétés du champ électrique. Tout d'abord, la représentation d'un champ vectoriel fait généralement appel à la notion de *ligne de champ*.

Ligne de champ

Pour représenter un champ vectoriel $\vec{A}(x, y, z)$, on trace des courbes orientées \mathcal{C} telles que leur tangente, en chaque point $M(x, y, z)$, ait la même direction et le même sens que le champ vectoriel en ce point. Ces courbes sont des lignes de champ.

D'un point de vue mathématique, si l'on note $d\vec{\ell} = (dx, dy, dz)$, le vecteur déplacement infinitésimal le long de la ligne de champ \mathcal{C} , on a

$$d\vec{\ell} \wedge \vec{A}(M) = \vec{0} \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{C}$$

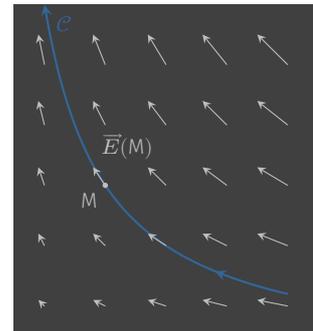


FIG. 1.6 : Ligne de champ \mathcal{C}

Champ créé par une charge ponctuelle – Plaçons une charge ponctuelle q à l'origine d'un repère et calculons le champ électrique créé en un point M de l'espace situé à la distance r de l'origine. On obtient

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} = \frac{q\vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

où \vec{u}_r désigne le vecteur unitaire radial du système de coordonnées sphériques.

On peut voir ci-contre la carte du champ électrique créé par une telle charge ponctuelle. Notez que les vecteurs sont normalisés de sorte qu'ils indiquent seulement la direction et le sens du champ électrique. On a ajouté quelques lignes de champ. On observe que le champ est radial et centrifuge si la charge est positive. Evidemment, si l'on inverse le signe de la charge, les lignes de champ sont radiales et orientées vers la charge.

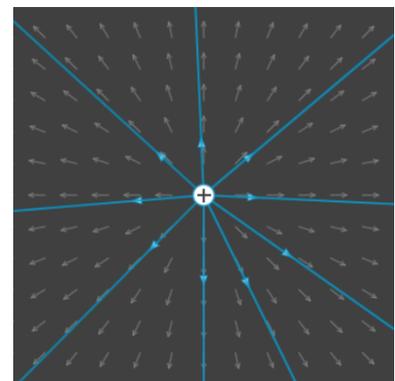


FIG. 1.7 : Carte de champ d'une charge ponctuelle positive.

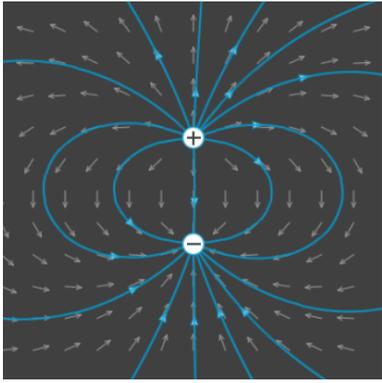


FIG. 1.8 : Carte de champ d'un doublet

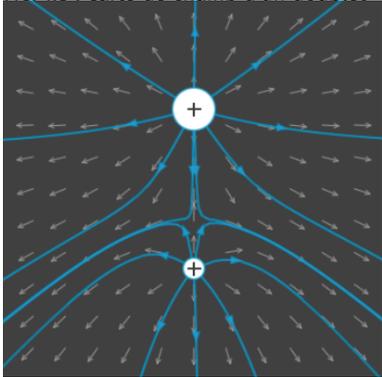


FIG. 1.9 : Carte de champ d'un système de 2 charges positives.

Champ créé par un doublet – Considérons deux charges ponctuelles de signe opposé, q et $-q$. Ce système forme ce que l'on appelle un doublet électrostatique. Regardons la carte de champ correspondante.

On peut voir que les lignes de champ partent de la charge positive pour converger vers la charge négative sans jamais se refermer. Par ailleurs, la distribution présente un plan de symétrie (plan miroir, vertical ici). On constate que pour tout point M de ce plan, $\vec{E}(M)$ est dans ce plan. La distribution présente également un plan d'antisymétrie (plan horizontal équidistant des deux charges) qui échange le signe des charges après une opération miroir. On peut noter que pour tout point M de ce plan, $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à ce plan.

Champ créé par deux charges de même signe – Considérons deux charges de même signe et de valeur différente situées sur un axe horizontal.

On peut faire les mêmes remarques que précédemment. Les lignes de champ partent des charges positives. Là encore, les lignes de champ, ne se referment pas sur elles mêmes. En terme de symétrie, la distribution de charges présente un plan de symétrie vertical et, comme précédemment, pour tout point M de ce plan, $\vec{E}(M)$ est dans ce plan. En revanche, la distribution ne présente pas de plan d'antisymétrie. Enfin, il existe un point où le champ est nul situé entre les deux charges. Ce point est un *point singulier*.

Symétries – Les exemples précédents mettent en évidence quelques propriétés de symétrie très générales.

Supposons qu'une distribution présente un plan de symétrie \mathcal{P} , c'est-à-dire que la distribution de charge est *invariante par rapport à une réflexion de plan \mathcal{P}* . On montre alors que le plan se comporte également comme un miroir vis-à-vis du champ électrique. Autrement dit, si l'on note M' l'image de M par une symétrie de plan \mathcal{P} , on a

$$\vec{E}(M') = \text{sym}(\vec{E}(M))$$

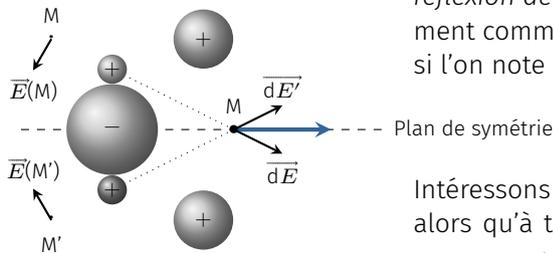


FIG. 1.10 : Distribution présentant un plan de symétrie.

Intéressons nous aux points situés dans le plan de symétrie. On voit alors qu'à tout point P de la distribution, créant un champ $\vec{dE}(M)$, correspond un point symétrique P' créant un champ $\vec{dE}'(M)$ telle que $\vec{dE}(M) + \vec{dE}'(M)$ se trouve dans le plan \mathcal{P} . Ainsi le champ résultant $\vec{E}(M)$ est nécessairement dans le plan \mathcal{P} . Une conséquence immédiate est que le champ électrique est nécessairement nul au centre de symétrie d'une distribution.

Supposons maintenant que la distribution change de signe par rapport à un plan \mathcal{P}' . On dit alors que \mathcal{P}' est un plan anti-symétrique. Cette symétrie se retrouve également dans le champ électrique : si l'on note M' l'image de M par une symétrie de plan \mathcal{P}' , on a

$$\vec{E}(M') = -\text{sym}\vec{E}(M)$$

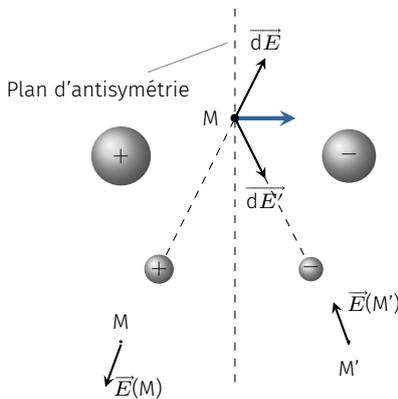


FIG. 1.11 : Distribution présentant un plan d'anti-symétrie.

Cherchons le champ créé en un point $M \in \mathcal{P}'$. On voit alors qu'à tout point P de la distribution, créant un champ $\vec{dE}(M)$, correspond un point symétrique P' créant un champ $\vec{dE}'(M)$ telle que $\vec{dE}(M) + \vec{dE}'(M)$ est perpendiculaire au plan \mathcal{P}' . Ainsi le champ résultant $\vec{E}(M)$ est nécessairement perpendiculaire au plan \mathcal{P}' .

À savoir

- ▶ En tout point d'un plan de symétrie, le champ électrique est contenu dans ce plan.
- ▶ En tout point d'un plan d'anti-symétrie, le champ électrique est perpendiculaire à ce plan.
- ▶ De manière plus générale, lorsque que certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétries des causes doivent se retrouver dans les effets produits (Principe de Curie). Ici, les causes sont représentées par la distribution de charges et les effets par le champ électrostatique.

Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

Fonction de répartition – On sait que toute distribution de charges est rigoureusement discontinue puisque tout transfert de charge ne se fait que par multiple entier de e . Cependant, à l'échelle macroscopique, un corps électrisé par frottement acquiert facilement une quantité de charge de l'ordre de

$$q = Ne \simeq \text{qqes nC} \quad \text{soit} \quad N \simeq 10^{10} \gg 1$$

Le nombre de particules est si grand que l'aspect discontinue passe inaperçu. On peut alors décrire la distribution de charges comme une *répartition continue de charges* et définir une fonction de répartition.

La **densité volumique de charge** $\rho(M)$ décrit la répartition en volume d'une quantité de charge. En un point M contenu dans un volume infinitésimal $d\tau$, la quantité de charge s'écrit

$$dq = \rho(M) d\tau \quad \heartsuit \quad (1.3)$$

où $\rho(M)$ s'exprime en $\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$. Si le milieu est homogène $\rho = q_{\text{total}}/V = \text{C}^{\text{te}}$.

La **densité surfacique de charge** $\sigma(M)$ décrit une répartition en surface d'une quantité de charge. En un point M contenu dans un élément d'aire infinitésimal dS , la quantité de charge s'écrit

$$dq = \sigma(M) dS \quad \heartsuit \quad (1.4)$$

où $\sigma(M)$ s'exprime en $\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Si le milieu est homogène $\sigma = q_{\text{total}}/S = \text{C}^{\text{te}}$.

Enfin, la **densité linéique de charge** caractérise la répartition de la charge le long d'un fil chargé. Pour un élément de longueur infinitésimal $d\ell$ situé en M , la quantité de charge s'écrit

$$dq = \lambda(M) d\ell \quad \heartsuit \quad (1.5)$$

où $\lambda(M)$ s'exprime en $\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$. Le passage du discret au continu pour

Les densités de charge introduites sont des grandeurs considérées locales à notre échelle, mais sont en réalité le résultat d'une moyenne effectuée à une échelle intermédiaire entre l'échelle atomique (ou la densité de charge varie de façon extrêmement brutale et erratique) et l'échelle macroscopique. Ainsi, l'intégrale (1.6) représente un champ local moyenné qui a, certes, le bon goût de varier continuellement, mais qui n'a plus de sens à l'échelle atomique.

le calcul du champ électrostatique transforme la somme en une intégrale :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \quad \heartsuit \quad (1.6)$$

où \mathcal{D} représente le domaine d'intégration (volume, surface, ligne). Suivant le type de problème, on remplacera dq par $\rho d\tau$ ou σdS ou λdl . Le calcul de cette intégrale est en général grandement simplifié si la distribution présente des symétries. C'est pourquoi, avant tout calcul direct, il est conseillé de faire une première analyse des propriétés de symétrie.

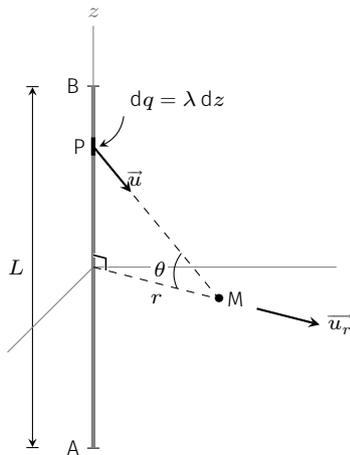


FIG. 1.12 : Calcul du champ créé par un segment chargé

Exemple – Champ créé dans le plan médiateur d'un segment chargé

On considère un segment AB de longueur L , contenant une charge Q uniformément répartie le long du segment. On cherche à calculer le champ électrique créé dans un plan médiateur du segment à la distance r . Ici la densité de charge est constante : $\lambda = Q/L$. Le plan médiateur est un plan de symétrie et le plan contenant le fil également de sorte que le champ est radial dirigé suivant le vecteur polaire \vec{u}_r . Par ailleurs, par symétrie de révolution, le champ ne dépend que de r . Nous avons donc

$$\vec{E}(M) = E_r \vec{u}_r$$

Il suffit donc de calculer la composante radiale du champ :

$$E_r = \vec{E} \cdot \vec{u}_r = \int \frac{dq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 PM^2} = \int_{AB} \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 PM^2} dz$$

Attention à ne pas écrire $E = \int dE$ car la somme d'une norme n'est pas égale, en général, à la norme de la somme. Les variables PM , z et θ étant liées, il faut choisir une variable d'intégration. L'angle θ est un bon choix. À l'aide des relations $PM = r / \cos \theta$ et $z = r \tan \theta$ (et donc $dz = r d\theta / \cos^2 \theta$), on a

$$E_r = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} 2 \sin \theta_0 \quad \text{avec} \quad \sin \theta_0 = \frac{L}{2\sqrt{r^2 + (L/2)^2}}$$

on peut finalement écrire le champ électrique :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{Q}{\sqrt{r^2 + (L/2)^2}} \vec{u}_r$$

Remarquons que pour $r \rightarrow \infty$ on retrouve $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ce qui est cohérent avec le fait qu'à grande distance le segment est assimilable à une charge ponctuelle.

POTENTIEL ET ÉNERGIE ÉLECTRIQUES

2

La force électrostatique présente les mêmes propriétés que la force gravitationnelle, à savoir qu'elle est conservative ce qui permet d'introduire tout naturellement les notions d'énergie et de potentiel électrostatique. La connaissance du potentiel suffit alors à décrire complètement les effets électriques.

Version en ligne

femto-physique.fr/electromagnetisme/potentiel-electrostatique.php

2.1 Potentiel électrostatique	11
Énergie d'interaction . . .	11
Potentiel électrostatique	12
Topographie	13
Tension électrique	14
2.2 L'énergie électrostatique .	15
Énergie d'une charge . . .	15
Énergie d'un système chargé	16

2.1 Potentiel électrostatique

Énergie d'interaction entre deux charges ponctuelles

Pour introduire la notion de potentiel électrostatique, intéressons nous à l'interaction entre deux charges électriques q et q' . Supposons la première charge fixe et l'autre se déplaçant entre deux points A et B suivant un parcours \mathcal{C} quelconque.

En vertu de la loi de Coulomb, la charge q' subit au cours de son mouvement une force

$$\vec{f} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

où \vec{u}_r est le vecteur unitaire dirigé de la charge q vers la charge q' . Cette force produit un travail mécanique

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$$

Le déplacement présente une composante parallèle à \vec{u}_r et une composante perpendiculaire : $d\vec{\ell} = d\vec{\ell}_{\perp} + d\vec{\ell}_{\parallel}$. La composante parallèle, la seule qui nous intéresse pour le calcul du travail, correspond au déplacement radial $d\vec{\ell}_{\parallel} = dr \vec{u}_r$ de sorte que le travail s'écrit

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\mathcal{C}} \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

On constate que le travail ne dépend pas du trajet emprunté par la particule entre A et B : **la force électrique est une force conservative**. On peut donc définir une énergie potentielle électrique \mathcal{E}_p . Or, on sait¹ que

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B)$$

ce qui donne, à une constante près (sans signification physique)

$$\mathcal{E}_p = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \heartsuit \quad (2.1)$$

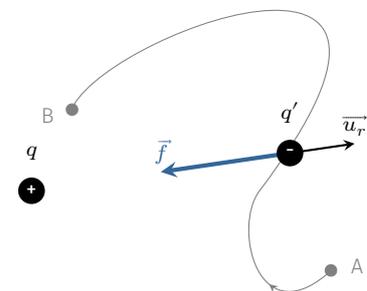


FIG. 2.1 : Travail de la force électrostatique.

1 : cf. cours de mécanique

Finalement, en voyageant dans l'espace, la particule « puise une énergie potentielle dans le champ électrique ».

Potentiel électrostatique

Poursuivons notre raisonnement en faisant intervenir le champ électrique. On peut dire que la charge q' se déplace dans un champ électrique \vec{E} créé par q ce qui produit une force $\vec{f} = q'\vec{E}$. Cette force conservative est reliée à l'énergie potentielle via la relation $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p$ d'où l'on tire facilement

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$$

L'opérateur « gradient »

L'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$ est un opérateur *différentiel linéaire*. Il s'applique à une fonction scalaire de l'espace (champ scalaire) et retourne une fonction vectorielle de l'espace (champ vectoriel). Il se lit *gradient* ou *nabla* et se note :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z) \quad \text{ou} \quad \nabla f(x, y, z)$$

L'expression de l'opérateur gradient dépend du système de coordonnées. En coordonnées cartésiennes on retiendra la formule suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

On voit donc que le champ électrique créé par une charge ponctuelle **est le gradient d'une fonction**. Cette propriété se généralise. En effet, comme le champ électrique créé par une distribution de charges est la somme de tous les champs individuels et que l'opérateur gradient est linéaire, il est facile de montrer que le champ créé par une distribution de charges peut toujours s'écrire

$$\vec{E}(M) \stackrel{\text{def}}{=} -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) \quad \heartsuit \quad (2.2)$$

Cette relation définit la fonction $V(M)$ appelée le **potentiel électrostatique au point M**.

On vient de voir que le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle q s'écrit

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad [\text{charge ponctuelle}]$$

Il en découle, en vertu du principe de superposition, l'expression gé-

nérale pour une distribution de charges $(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N)$:

$$V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad \heartsuit \quad (2.3)$$

Le passage discret \rightarrow continu s'obtient par l'intégrale

$$V(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \heartsuit \quad (2.4)$$

où $dq = \lambda d\ell$ ou σdS ou $\rho_e dV$ suivant le type de distribution.

Le potentiel s'exprime en **volt** (symbole : V), en hommage à Volta². Une analyse dimensionnelle montre que $[V] = [E] L$ de sorte que le champ électrique peut s'exprimer en $V.m^{-1}$.

Finalement, on peut dire qu'un ensemble de charges électriques fixes produit un champ de potentiel $V(M)$ et que toute charge q « baignant » dans ce champ subit une force

$$\vec{f} = -q\overline{\text{grad}}V$$

La connaissance du potentiel $V(M)$ permet de connaître le champ électrique $\vec{E}(M)$ et vice versa.

La relation (2.2) implique que le potentiel est défini à une constante additive près, dont la valeur est arbitraire. En l'absence d'autres conventions, nous ferons le choix de la prendre égale à zéro.

Topographie

En général, le potentiel $V(M)$ dépend des trois coordonnées de l'espace mais, pour simplifier, nous allons supposer que le champ $V(M)$ ne dépend que de deux coordonnées, disons x et y . Cela revient finalement à étudier le potentiel dans un plan particulier. Il y a deux façons de représenter le champ scalaire $V(x, y)$:

1. On peut tracer l'ensemble des points $z = V(x, y)$ dans un repère cartésien et l'on obtient alors une surface donnant l'évolution du potentiel. En chaque point de cette surface, la plus grande pente donne accès au gradient du potentiel, c'est-à-dire au champ électrique. Plus exactement le champ électrique

$$\vec{E} = - \left(\begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{array} \right)$$

correspond à la plus grande pente dans le sens de la descente. Ainsi le champ électrique est nul pour les points (x, y) correspondant aux sommets, vallées ou col de la surface. On comprend aussi pourquoi les lignes de champ ne se referment pas : en effet, si l'on suit un chemin qui ne cesse de descendre, on ne pourra jamais revenir au point de départ.

Il faut noter cependant que le passage discret \rightarrow continu introduit des difficultés mathématiques. Par exemple, l'intégrale citée diverge pour un segment infini uniformément chargé. Cette divergence est levée dès que la taille du système devient finie ce qui montre qu'elle est liée à une modélisation non physique.

2 : **Alessandro Volta (1745 -1827)** : physicien italien et inventeur de la première pile en 1800.

2. À l’instar des cartes topographiques, on préfère souvent représenter des **équipotentiels**, c’est-à-dire des courbes de niveau correspondant à une unique valeur de potentiel.

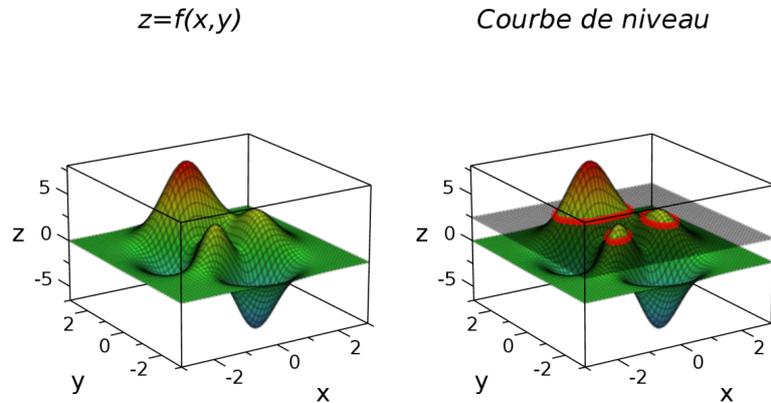


FIG. 2.2 : Représentations d’un champ scalaire.

Si le potentiel ne dépend que de deux coordonnées, l’équipotentielle $V(x, y) = C^{te}$ est **une courbe**. En revanche, si le potentiel dépend de trois coordonnées, l’équipotentielle $V(x, y, z) = C^{te}$ correspond à **une surface**.

Relation entre lignes de champ électrique et équipotentiels – Considérons un point M se déplaçant le long d’une équipotentielle particulière. Le potentiel conservant une valeur constante, on a $dV = 0$. Or, on peut écrire

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Ainsi, le long d’une équipotentielle, on a $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ ce qui signifie que si l’on se déplace le long d’une équipotentielle, on croise toujours le champ électrique avec un angle droit. Autrement dit, **les lignes de champ électriques sont perpendiculaires aux équipotentiels**.

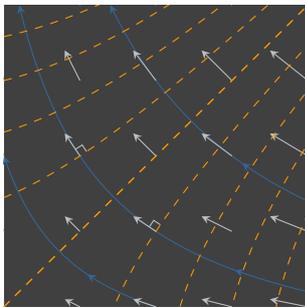


FIG. 2.3 : Les équipotentiels (en pointillées) coupent les lignes de champ (en bleu) à angle droit.

En conséquence, si la distribution de charges présente un plan d’antisymétrie, celui-ci est nécessairement une surface équipotentielle puisque le champ y est perpendiculaire.

Notion de tension électrique

Par définition, la tension électrique est une différence de potentiel électrique ou *d.d.p.* entre deux points. On notera U_{AB} la *d.d.p.* entre A et B :

$$U_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} V(A) - V(B) \quad \heartsuit \quad (2.5)$$

La tension, comme le potentiel électrique, s’exprime en volt. Notez que si le potentiel présente une indétermination, la tension est par

Électronique	Piles	Électrotechnique (moteurs, centrales)
$\mu\text{ V} - \text{V}$	1-10 V	100 V - 400 kV

TAB. 2.1 : Ordres de grandeur

contre bien déterminée ce qui en fait une grandeur mesurable indépendante du choix arbitraire de l'origine des potentiels.

La connaissance du champ électrique en tout point d'une région de l'espace permet de calculer la tension entre deux points de cette région par un calcul intégral :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B) = U_{AB} \quad \heartsuit \quad (2.6)$$

En conséquence, si le champ électrique possède une norme constante E le long d'une ligne de champ, la tension existante entre deux points de cette ligne de champ distants de d vaut $U = Ed$.

2.2 L'énergie électrostatique

Nous distinguerons deux cas de figure.

1. Soit une charge électrique est plongée dans un champ électrique créé par un système électrique extérieur. On dira que la charge est en interaction avec un champ électrique extérieur et on montrera que l'on peut définir une énergie potentielle électrique.
2. Soit N charges sont en interaction mutuelle. On montrera que ce système de charges possède une énergie potentielle interne.

Énergie potentielle d'une charge dans un champ extérieur

La force électrostatique que subit une charge q plongée dans un champ extérieur \vec{E}_{ext} vaut $\vec{F} = q\vec{E}_{\text{ext}}$. En vertu de la définition du potentiel électrique, on a

$$\vec{E}_{\text{ext}} = -\overrightarrow{\text{grad}}V_{\text{ext}}$$

où V_{ext} désigne le potentiel électrique. On peut aussi écrire

$$\vec{F} = q\vec{E}_{\text{ext}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_p = qV_{\text{ext}} \quad \heartsuit \quad (2.7)$$

où \mathcal{E}_p désigne l'**énergie potentielle électrostatique**. Cette énergie s'exprime en joule et n'est pas à confondre avec le potentiel électrostatique.

L'électron-volt

Une charge électrique q soumise à un champ électrique voit donc son énergie cinétique varier suivant la relation (conservation de l'énergie) :

$$\mathcal{E}_{cA} + qV_A = \mathcal{E}_{cB} + qV_B \Rightarrow \mathcal{E}_{cB} = \mathcal{E}_{cA} + qU_{AB}$$

Autrement dit, le gain d'énergie ne dépend que de la tension électrique entre la position initiale et la position finale :

$$\Delta\mathcal{E}_c = qU_{AB}$$

Lorsque $q = e$ et $U_{AB} = 1$ V, le gain d'énergie vaut, *par définition*, 1 électron-volt. Ainsi,

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Énergie d'interaction d'un système de charges

Considérons une distribution stationnaire de N charges électriques $\{q_{i=1,\dots,N}\}$ situées en P_i . On note r_{ij} la distance qui sépare les charges q_i et q_j . Par définition, l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_{p,\text{int}}$ d'un tel système représente le travail qu'un opérateur doit fournir pour amener, de façon quasi-statique et depuis l'infini, les charges dans leur position finale. Puisque la force électrique est conservative, l'énergie que l'on doit dépenser ne dépend pas de la manière dont on s'y prend pour constituer le système.

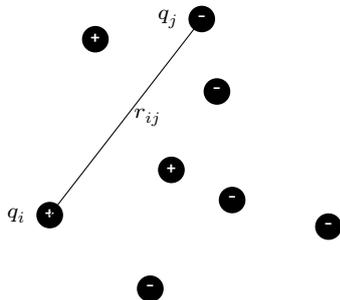


FIG. 2.4 : Distribution de N charges ponctuelles.

Commençons donc par placer la charge q_1 en P_1 , ce qui ne nous coûte aucun travail. Ensuite amenons depuis l'infini la charge q_2 en P_2 . Lors de cette opération, la force électrique qui agit sur q_2 produit un travail

$$W = -\Delta\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p|_{\text{initial}} - \mathcal{E}_p|_{\text{final}} = q_2 (V_{\text{initial}} - V_{\text{final}})$$

Ici, le potentiel électrique auquel est soumise la charge q_2 vaut

$$V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + C^{\text{te}} \quad \text{d'où} \quad W = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Ce que l'on cherche n'est pas le travail de la force électrique mais le travail qu'il faut fournir pour s'opposer à celle-ci. Si le déplacement se fait de manière quasi-statique, on doit fournir un travail opposé à W . Pour un système de 2 charges, on trouve donc

$$\mathcal{E}_{p,\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Ajoutons maintenant une troisième charge q_3 . Cette opération nous coûte une énergie supplémentaire

$$q_3 (V_{\text{final}} - V_{\text{initial}}) = q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right)$$

de sorte que l'énergie d'un système de trois charges vaut

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

On trouve ainsi autant de termes $q_i q_j / (4\pi\epsilon_0 r_{ij})$ que de couples en interaction, ce qui se généralise sans difficulté : l'énergie d'interaction d'un système³ constitué par N charges ponctuelles vaut

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \sum_{\text{couples } (i,j)} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad \heartsuit \quad (2.8)$$

3 : On parle aussi d'énergie de mutuelle interaction.

On peut aussi reformuler en faisant intervenir le potentiel que subit la charge q_i , à savoir :

$$V_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p \text{ int}} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (2.9) \end{aligned}$$

On rappelle que

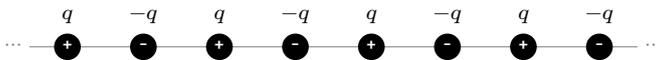
$$\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = \sum_{i,j < i} u_{ij} + \sum_{i,j > i} u_{ij}$$

ce qui donne lorsque $u_{ij} = u_{ji}$

$$\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = 2 \sum_{i,j < i} u_{ij}$$

Notez que cette énergie ne dépend que des positions relatives des charges les unes par rapport aux autres. En effet, l'expression (2.8) est invariante par translation et/ou rotation du système de charges. De ce fait cette énergie est liée à la configuration de l'ensemble; il caractérise donc le système et on ne peut imputer une partie de l'énergie à une charge particulière.

Exercice – Calculer l'énergie potentielle électrostatique d'un système constitué de $N \gg 1$ charges q disposées de façon alternative avec N charges $-q$ le long d'une ligne; l'espacement entre deux voisins étant constant et fixé à a .



On donne $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \ln 2$

Rép. $\mathcal{E}_{p \text{ int}} = -\frac{2N \ln 2 q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$

La valeur négative d'une telle énergie, comme dans l'exercice précédent, signifie simplement qu'il faut fournir de l'énergie pour séparer les charges et les emmener à l'infini.

Les faits montrent que des corps neutres peuvent malgré tout interagir via des forces de nature électriques, dite dipolaires. Ce cours aborde ces aspects qui jouent un rôle important dans la modélisation des interactions moléculaires ainsi que dans le phénomène de polarisation de la matière en général.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/dipole-electrique.php>

- 3.1 L'approximation dipolaire 19
 - Le doublet électrostatique 19
 - Généralisation 20
 - Moment dipolaire 21
 - Champ électrique dipolaire 23
- 3.2 Interactions dipolaires . . 24
 - Énergie d'un dipôle 24
 - Action d'un champ unipolaire 25
 - Force dipolaire 26
 - Interactions de van der Waals 26

3.1 L'approximation dipolaire

Potentiel créé par un doublet électrostatique

On appelle doublet électrostatique, un ensemble de deux charges ponctuelles opposées $+q$ et $-q$ séparées d'une distance a . Sur la figure ci-contre, on note que l'axe AB est un axe de révolution. De plus, le plan contenant le doublet et le point M, est un plan de symétrie de la distribution. Par conséquent,

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta$$

Si l'on note $r_1 = AM$ et $r_2 = BM$, le potentiel créé par ce doublet en un point M s'écrit

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Notons que l'équipotentielle $V = 0$ est l'ensemble des points telles que $r_1 = r_2$ ce qui correspond au plan médiateur du segment [AB], lequel représente également un plan d'antisymétrie de la distribution.

Cherchons maintenant à calculer le potentiel loin du doublet; c'est-à-dire à une distance $r \gg a$. Calculons le terme prépondérant du potentiel à l'aide d'un développement limité. On a (théorème de Pythagore généralisé)

$$r_1^2 = \|\vec{AO} + \vec{OM}\|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 - ar \cos \theta$$

D'où

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{2r}\right)^2 - \frac{a \cos \theta}{r} \right]^{-1/2}$$

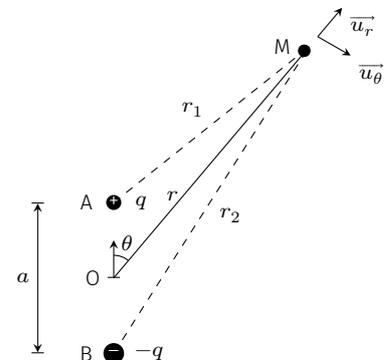


FIG. 3.1 : Doublet électrostatique

Si on se contente d'une approximation à l'ordre 1 en a/r , on trouve

$$\frac{1}{r_1} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a \cos \theta}{2r} \right)$$

De même pour $1/r_2$ ($\theta \rightarrow \pi - \theta$):

$$\frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a \cos \theta}{2r} \right)$$

Finalement, loin du dipôle, on peut approcher le potentiel par

$$V \simeq \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour } r \gg a$$

Cela constitue l'approximation dipolaire. On remarque que le potentiel décroît à grande distance comme $1/r^2$. En effet, loin du doublet, on « voit » une charge totale nulle ce qui explique que les effets électriques diminuent plus vite que ceux d'une charge ponctuelle.

Moment dipolaire électrique – On note également que le potentiel dépend du produit qa qui représente le *moment dipolaire électrique* du doublet. On définit le moment dipolaire \vec{p} du doublet par

$$\vec{p} = q\vec{BA} \quad \heartsuit \quad (3.1)$$

orienté de la charge négative vers la charge positive. Ce moment s'exprime en C.m. On peut alors exprimer le potentiel dans l'approximation dipolaire à l'aide du moment dipolaire :

$$V_{\text{dipolaire}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \heartsuit \quad (3.2)$$

Généralisation

Généralisons le résultat précédent en considérant une distribution localisée de charges. On suppose qu'un ensemble de N charges (q_1, \dots, q_N) occupe un volume fini. Nous noterons a , la *dimension caractéristique* de cette distribution. Cette distribution peut par exemple modéliser une molécule, un ion complexe, un métal chargé etc. On cherche à calculer les effets électriques (potentiel et champ électrique) dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire pour des points M situés à une distance grande devant a .

Plaçons l'origine O d'un repère dans la distribution puis adoptons les notations suivantes :

- ▶ $r = OM$, la distance entre O et M ;
- ▶ $r_i = P_iM$ où P_i repère la position de la charge q_i ;
- ▶ $a_i = OP_i$, la distance entre O et P_i .

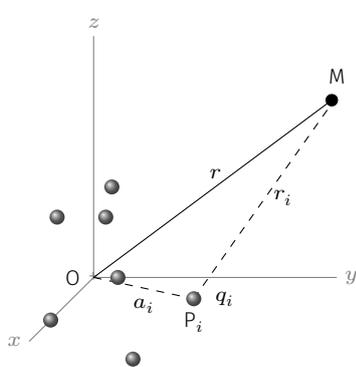


FIG. 3.2 : Distribution de N charges ponctuelles.

Le potentiel électrostatique créé en M par la distribution de charges s'écrit

$$V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

avec

$$r_i = \|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP_i}\| = r \sqrt{1 + \left(\frac{a_i}{r}\right)^2 - 2 \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP_i}}{r^2}}$$

Puisque $a_i/r \ll 1$, effectuons un développement limité du potentiel à l'ordre 2 en a_i/r à l'aide de la relation $(1 + \epsilon)^{-1/2} = 1 - 1/2\epsilon + 3/8\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$:

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 + \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP_i}}{r^2} + \frac{3(\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{u_r})^2 - OP_i^2}{2r^2} + o\left(\frac{a_i^2}{r^2}\right) \right]$$

Si l'on néglige les termes d'ordre supérieur à 2, on obtient l'approximation suivante :

$$V(M) \simeq \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{(\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}) \cdot \overrightarrow{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

On voit apparaître des termes décroissant en $1/r^n$. Les trois termes sont les premiers termes de ce que l'on appelle le *développement multipolaire* de $V(M)$:

1. Le premier terme désigne le *terme unipolaire*. C'est le terme prépondérant lorsque la charge totale est non nulle. Par exemple, un ion crée un champ quasi-newtonien dès que l'on se trouve à une distance grande devant sa taille¹.
2. Le deuxième terme représente le *terme dipolaire*. Il devient prépondérant lorsque la charge totale est nulle à condition que $\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} \neq \vec{0}$. C'est par exemple le cas d'une molécule neutre qui ne présente pas de centre de symétrie (on parle de molécule polaire), comme par exemple H_2O , HCl , etc.
3. Le troisième terme représente le *terme quadrupolaire*. Il décroît en $1/r^3$ et dépend du moment quadrupolaire $Q = \sum \frac{1}{2} q_i a_i^2 (3 \cos^2 \theta_i - 1)$ qui mesure l'écart à la symétrie sphérique.

1 : On montre que dans ce cas, si l'on place O au barycentre des charges, le deuxième terme disparaît et le terme suivant varie en $1/r^3$ (terme quadrupolaire).

À retenir

Pour une distribution électriquement neutre, on définit le moment dipolaire électrique

$$\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$$

Si ce moment dipolaire est non nul, le potentiel électrique s'écrit dans l'approximation dipolaire :

$$V_{\text{dipolaire}}(M) = \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Moment dipolaire électrique

La notion de dipôle trouve naturellement sa place dans la description de certaines molécules pour lesquelles le barycentre des charges positives ne coïncide plus avec le barycentre des charges négatives. En effet, supposons une distribution de charges électriquement neutre,

TAB. 3.1 : Entités chimiques et types d'actions électriques produits.

Entité chimique	H ₂ O	H ₂	HC	CO ₂	NH ₄ ⁺	He
Charge	0	0	0	0	≠ 0	0
Moment dipolaire	≠ 0	0	≠ 0	0	0	0
Moment quadrupolaire	≠ 0	≠ 0	≠ 0	≠ 0	≠ 0	0
Potentiel à longue distance	1/r ²	1/r ³	1/r ²	1/r ³	1/r	1/r ⁿ n ≥ 4

contenant N₊ charges positives {q_i⁺} et N₋ charges négatives {q_i⁻}. L'électroneutralité se traduit par la relation

$$N_+q_i^+ = -N_-q_i^- = Q$$

Cette neutralité électrique induit que le moment dipolaire ne dépend pas du choix de l'origine². En effet,

2 : Un théorème général stipule que le premier moment multipolaire non nul est indépendant du choix de l'origine ([2] p.181).

$$\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_i q_i \overrightarrow{OO'} + \sum_i q_i \overrightarrow{O'P_i} = \sum_i q_i \overrightarrow{O'P_i}$$

Notons maintenant B₊ le barycentre des charges positives et B₋ celui des charges négatives. Par définition du barycentre, on a

$$Q \overrightarrow{OB_+} = \sum_{\text{charges } +} q_i^+ \overrightarrow{OP_i} \quad \text{et} \quad -Q \overrightarrow{OB_-} = \sum_{\text{charges } -} q_i^- \overrightarrow{OP_i}$$

Par conséquent

$$\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_{\text{charges } +} q_i^+ \overrightarrow{OP_i} + \sum_{\text{charges } -} q_i^- \overrightarrow{OP_i} = Q \overrightarrow{OB_+} - Q \overrightarrow{OB_-}$$

Ainsi, le moment dipolaire peut se réécrire

$$\vec{p} = Q \overrightarrow{B_- B_+} \quad \heartsuit \quad (3.3)$$

Le moment dipolaire est donc lié au fait que le barycentre des charges négatives ne coïncide pas avec le barycentre des charges positives. Quand une molécule présente cette propriété on dit qu'elle est polaire (H₂O, HCl, NO, etc.) alors que si elle présente un centre de symétrie on dit qu'elle est apolaire (He, N₂, O₂, CO₂, etc.). Le tableau ci-dessous recense quelques exemples d'entités chimiques et le type d'action qu'elles produisent.

Ordre de grandeur – Le moment dipolaire s'exprime en C.m dans le Système international d'unités mais les chimistes préfèrent une unité plus adaptée au monde moléculaire : le debye (symbole : D). Par définition

$$1 \text{ D} = 3,335 \, 64 \cdot 10^{-30} \text{ C.m} \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$$

Halogénure	Moment dipolaire
HF	1,97 D
HCl	1,03 D
HBr	0,78 D
HI	0,38 D

TAB. 3.2 : Moments dipolaires des halogénures d'hydrogène.

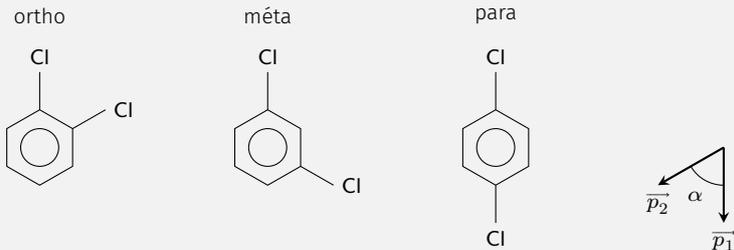
La TAB. 3.2 donne les moments dipolaires des halogénures d'hydrogène mettant en évidence le phénomène d'électronégativité : l'halogène déplace vers lui le barycentre des charges négatives ce qui induit un moment dipolaire dirigé vers H. Ce phénomène augmente de l'iode vers le fluor, élément le plus électronégatif du tableau périodique.

Il est pratique parfois de décomposer un système neutre en N sous-systèmes neutres auxquels on associe un moment dipolaire \vec{p}_i . Dans

ce cas, le moment dipolaire de la distribution complète est la somme vectorielle $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$. C'est pourquoi, on peut calculer le moment dipolaire d'une molécule en sommant vectoriellement les moments dipolaires associées à chaque liaison.

Exemple – Identification d'un isomère

L'un des isomères du dichlorobenzène a pour moment dipolaire $p = 1,5$ D. Sachant que la liaison C – Cl possède un moment $p_0 = 1,6$ D et que la liaison C – H est quasi apolaire, on peut déterminer cet isomère. En effet, le dichlorobenzène existe sous trois formes possibles :



Si l'on néglige le moment dipolaire des liaisons C – H, alors le moment dipolaire résulte de la somme vectorielle des moments dipolaires associées aux liaisons C – Cl. Si l'on note α l'angle entre ces liaisons, on a

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \implies p = 2p_0 \cos(\alpha/2)$$

On en déduit $\alpha = 124^\circ$, valeur assez proche de 120° . Par conséquent, il s'agit de la forme méta-dichlorobenzène.

Champ électrique dans l'approximation dipolaire

Intéressons au champ électrique créé par une distribution électriquement neutre et présentant un moment dipolaire. Se plaçant dans l'approximation dipolaire, il suffit de calculer l'opposé du gradient³ du potentiel $V_{\text{dipolaire}}(M)$:

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right)$$

Utilisons l'identité $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\overrightarrow{\text{grad}}(g) + g\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ en prenant $g = \vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}$ et $f = 1/r^3$:

$$\vec{E}(M) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) + (\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right) \right]$$

D'une part,

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\text{grad}}(p_x x + p_y y + p_z z) = \vec{p}$$

d'autre part,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\vec{u}_r}{r^4}$$

3 : D'un point de vue mathématique, la démarche n'est pas rigoureuse. Il faudrait, en principe, calculer directement le champ électrique puis faire tendre r vers l'infini : on obtient le même résultat.

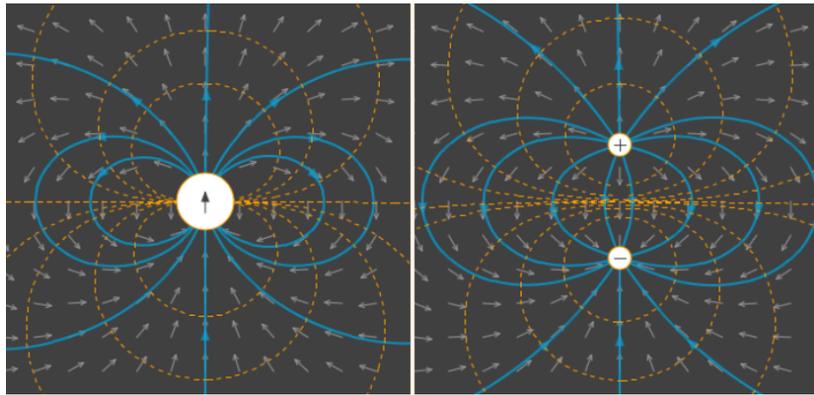


FIG. 3.3 : Lignes de champ (lignes continues) et équipotentielles (lignes discontinues) créées par un dipôle. À gauche, dans l'approximation dipolaire, à droite au voisinage de l'origine.

On obtient finalement

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2p \cos \theta \\ p \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

où la dernière expression est obtenue en orientant le moment dipolaire suivant l'axe (Oz) et en repérant le point M en coordonnées sphériques.

Notons que le champ électrique décroît en $1/r^3$ et qu'il n'est pas isotrope. La FIG. 3.3 représente les lignes de champs électriques et les équipotentielles, vues de loin et vues de près.

On serait tenté de conclure que, comme le laisse penser le schéma, les lignes de champ se referment à l'origine. Cependant au voisinage de l'origine, l'approximation dipolaire n'est plus valide. Un examen attentif de ce qui se passe près de l'origine montre que les lignes ne se referment pas : cette propriété est générale en électrostatique.

- ▶ On remarque que les lignes de champ présentent deux lobes symétriques perpendiculaires au moment dipolaire. On peut montrer que les lignes de champ ont pour équation paramétrique $r(\theta) = K' \sin^2 \theta$.
- ▶ Quant au potentiel électrique, la formule (3.2) permet de trouver l'équation paramétrique des équipotentielles : $r = K \sqrt{\cos \theta}$.

3.2 Interactions dipolaires

Énergie d'un dipôle dans un champ électrique extérieur

Supposons un dipôle électrique situé en O et plongeant dans le champ électrique \vec{E}_{ext} créé par une autre distribution de charges. Notons $V_{\text{ext}}(x, y, z)$ le potentiel associé. Insistons sur le fait que ces champs sont sans rapport avec les champs produits par le dipôle lui-même.

Cherchons à exprimer l'énergie du dipôle \mathcal{E}_p dans l'hypothèse où le champ extérieur varie peu à l'échelle du dipôle. Si l'on adopte un modèle de distribution discrète pour le dipôle, on a

Attention, il ne faut pas confondre cette énergie avec

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \sum_{\text{couples } (i,j)} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

qui représente l'énergie interne du dipôle, somme des énergie d'interactions mutuelles entre les charges du dipôle.

$$\mathcal{E}_p = \sum_i q_i V_{\text{ext}}(x_i, y_i, z_i)$$

où x_i, y_i et z_i sont les coordonnées du point P_i .

Compte tenu des hypothèses, contentons nous d'effectuer un développement du potentiel à l'ordre un, autour de O :

$$V_{\text{ext}}(x_i, y_i, z_i) \simeq V_{\text{ext}}(0, 0, 0) + x_i \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial x} + y_i \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial y} + z_i \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial z} = V_0 - \vec{E}_{\text{ext}} \cdot \overrightarrow{OP_i}$$

L'expression de l'énergie devient

$$\mathcal{E}_p = \sum_i q_i V_0 - \left(\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} \right) \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$$

En vertu de la neutralité électrique du dipôle et de la définition du moment dipolaire, on trouve

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}} \quad \heartsuit \quad (3.4)$$

Exercice – On considère une molécule A de taille caractéristique a de moment dipolaire \vec{p} en interaction avec un ion B assimilable à une charge ponctuelle q_0 située à la distance $AB \gg a$ de la molécule. On peut déterminer l'énergie de cette interaction en considérant que la charge est plongée dans le potentiel produit par la molécule, ou que la molécule est plongée dans le champ créé par la charge ponctuelle. Déterminer l'énergie d'interaction de ces deux manières, et vérifier la cohérence.

Rép. – Les deux approches donnent $\mathcal{E}_p = \frac{q_0 \vec{p} \cdot \overrightarrow{AB}}{4\pi\epsilon_0 AB^3}$.

Dipôle rigide dans un champ uniforme

Plongeons une molécule polaire dans un champ électrostatique extérieur *uniforme* \vec{E}_{ext} . On suppose que cette molécule conserve un moment dipolaire constant : on dit que le dipôle est rigide. Quelles sont les actions que subit le dipôle de la part du champ extérieur ?

Commençons par écrire l'énergie d'interaction :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}} = -p E_{\text{ext}} \cos \theta$$

Notons tout d'abord que l'énergie ne dépend pas de la position du dipôle. Cette invariance par translation se traduit par une résultante des forces nulles. On peut le vérifier en calculant directement la force électrique :

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_{\text{ext}} \sum_i q_i = \vec{0}$$

Ainsi la molécule n'est pas accélérée. En revanche, elle est soumise à un couple qui tend à la faire tourner. D'après le profil de l'énergie potentielle, on voit que le système va chercher à adopter la configuration la plus stable, c'est-à-dire celle correspondant à un alignement du dipôle avec le champ extérieur ($\theta = 0$). On peut calculer le moment de ce couple d'orientation :

$$\vec{\Gamma} = \sum_i \overrightarrow{OP_i} \wedge q_i \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}$$

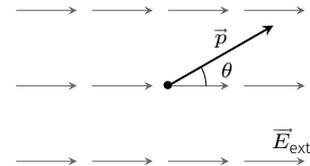


FIG. 3.4 : Dipôle rigide dans un champ uniforme.

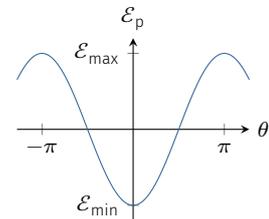


FIG. 3.5 : Profil énergétique

4 : Mathématiquement le couple est nul lorsque le dipôle est antiparallèle avec le champ électrique. Cependant, on peut voir sur le profil énergétique que cette configuration n'est pas stable : toute perturbation angulaire suffit à faire apparaître un couple qui tend à éloigner le dipôle de cette configuration.

moment qui tend à aligner le dipôle avec le champ électrique⁴. Ainsi, l'action d'un champ électrique uniforme consiste en une orientation du moment dipolaire suivant le champ électrique.

Exemple

Lorsque l'on dissout un ion en solution aqueuse, les molécules d'eau entourent l'ion en orientant le moment dipolaire de la molécule d'eau dans le sens du champ créé par l'ion. Ce processus permet d'atténuer efficacement le champ électrique créé par l'ion.

Dipôle rigide dans un champ non uniforme

Supposons maintenant que le champ ne soit plus uniforme et admettons que le processus d'orientation du moment dipolaire suivant le champ électrique soit réalisé à tout instant. Dans ce cas, l'énergie du dipôle s'écrit $\mathcal{E}_p = -pE_{\text{ext}}$. Les actions qui apparaissent font en sorte de diminuer cette énergie : autrement dit, le dipôle est soumis à une force qui tend à le déplacer dans la zone où règne le champ le plus fort. Mathématiquement, on a

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p = p \overrightarrow{\text{grad}}E_{\text{ext}}$$

Actions d'un champ non uniforme sur un dipôle

Un dipôle rigide dans un champ non uniforme est soumis à une force qui tend à le déplacer vers les zones où règne un champ électrique fort (une fois le dipôle aligné avec le champ).

C'est ce qui explique par exemple qu'un bâton d'ébonite frotté (et donc chargé) attire des morceaux de papier (isolants neutres). En effet, la tige d'ébonite crée un champ électrique qui polarise le morceau de papier, lequel acquiert un moment dipolaire forcément orienté avec le champ électrique. Ce champ étant plus intense près de l'extrémité du bâton, le morceau de papier va venir s'y coller.

Interactions de van der Waals

5 : Nommées ainsi en l'honneur du physicien néerlandais Johannes Diderik van der Waals (1837 – 1923), prix Nobel de physique 1910, qui fut le premier à introduire leurs effets dans les équations d'état des gaz en 1873.

Au sein de la matière, les molécules, bien qu'électriquement neutres, sont soumises à de faibles interactions attractives que l'on désigne par *interactions de van der Waals*⁵. Ces interactions jouent un rôle important dans la science du vivant, en chimie et en physique des interfaces. Elles sont par exemple responsables de la cohésion des cristaux liquides et moléculaires. Les phénomènes de tension de surface reposent également sur cette force. On peut interpréter l'interaction de van der Waals comme le résultat d'une interaction entre dipôles dont l'énergie d'interaction se décompose en trois termes :

$$\mathcal{E}_{\text{vdW}} = \mathcal{E}_{\text{Keesom}} + \mathcal{E}_{\text{Debye}} + \mathcal{E}_{\text{London}}$$

Terme de Keesom : deux molécules polaires de moment dipolaire p_1 et p_2 auront tendance à orienter leur moment dipolaire dans le sens du champ produit par l'autre dipôle puis à se rapprocher du fait de l'attraction vers les champs forts. Du fait de l'agitation thermique, il faut moyenner cette interaction sur toutes les orientations possibles. On montre alors que l'énergie d'interaction moyenne entre deux dipôles permanents distants de r s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{Keesom}} = -\frac{p_1^2 p_2^2}{k_B T (4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{r^6}$$

Terme de Debye : il s'agit de l'interaction d'une molécule polaire avec une molécule apolaire, comme par exemple l'interaction entre H_2O et O_2 . La molécule apolaire ne présente pas de moment dipolaire en raison de l'existence d'un centre de symétrie, cependant, en présence d'un champ électrique, le nuage électronique se déforme ce qui déplace le barycentre des charges négatives et induit l'apparition d'un moment dipolaire : on dit que la molécule s'est polarisée. Le moment dipolaire induit est proportionnel au champ électrique extérieur :

$$\vec{p}_{\text{induit}} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_{\text{ext}}$$

où α désigne la **polarisabilité**. Ainsi, en présence d'un dipôle permanent, une molécule apolaire se polarise et a tendance à s'orienter suivant le champ polarisant puis à se rapprocher de la molécule responsable de cette polarisation. On trouve une énergie d'interaction

$$\mathcal{E}_{\text{Debye}} = -\frac{p_1^2 \alpha}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^6}$$

Force de London : on pourrait penser que deux atomes apolaires (comme les gaz rares) ou deux molécules apolaires (comme O_2) n'interagissent pas puisqu'ils ne présentent pas de moment dipolaire. En réalité, chaque molécule présente un moment dipolaire fluctuant $p(t)$ de moyenne nulle : $\overline{p(t)} = \vec{0}$. Le terme d'interaction, proportionnel à la moyenne $\overline{p^2}$, n'est pas nulle. On montre que le terme d'interaction varie aussi comme $1/r^6$.

Forces de van der Waals

En résumé, dans la matière il existe des interactions attractives entre toutes les molécules. L'énergie d'interaction s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{vdW}} = -\frac{C}{r^6}$$

ce qui donne naissance à une force moyenne attractive

$$\vec{F}_{\text{VDW}} = -\frac{6C}{r^7} \vec{u}_r$$

La décroissance rapide de la force de van der Waals permet d'expliquer sa courte portée et son influence dans les milieux denses (liquide et solide).

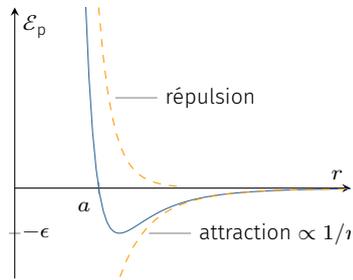


FIG. 3.6 : Potentiel de Lennard-Jones.

Bien entendu, les molécules finissent par se repousser lorsqu'elles sont en contact proche du fait de la répulsion électronique et du principe d'exclusion de Pauli. Cette effet stérique est en général décrit par un terme d'énergie répulsif en $1/r^{12}$. Un modèle très souvent utilisé en dynamique moléculaire pour sa simplicité, est le modèle de Lennard-Jones :

$$\mathcal{E}_p(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right]$$

où ϵ représente la profondeur du puits de potentiel et a la position correspondant à une énergie nulle (cf. FIG. 3.6). La profondeur du puits est de l'ordre du kJ/mol ce qui explique l'existence de cristaux moléculaires, à basse température.

La force de van der Waals entre deux atomes isolés a pu être mesurée directement pour la première fois par une équipe de physiciens français en 2013[3]. Cette prouesse a été rendue possible grâce aux technologies associées au refroidissement laser et au piégeage optique.

CONDUCTEURS ÉLECTRIQUES

4

Ce cours aborde les propriétés électriques des conducteurs, aussi bien à l'équilibre que hors équilibre (phénomène de conduction). Ce sera l'occasion d'introduire les notions de capacité d'un condensateur et de résistance d'un conducteur ohmique utiles en électricité.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/conducteurs-electriques.php>

4.1 Conduction électrique

Un conducteur est un système macroscopique qui contient des porteurs de charge libres, susceptibles de se mettre en mouvement sous l'action d'une force extérieure.

Conducteur	Porteurs de charge libres
Métal (Cu, Ag, Au, Al, ...)	Électrons libres délocalisés
Semi conducteur dopé (Si, AsGa, ...)	Paires électron - trou
Solution électrolytique (KOH _{aq} , NaCl _{aq} ,...)	Ions dissous
Plasma (gaz ionisé)	Protons, électrons

Courant électrique

Définition

Le courant électrique est le résultat d'un *déplacement d'ensemble* de particules chargées. Son intensité I est donnée par le flux (ou le débit) de charge qui traverse une section (S). Plus précisément, la quantité de charge dq qui passe au travers de (S) entre t et $t + dt$ vaut

$$dq = I(t) dt$$

L'intensité électrique s'exprime en **ampère** (symbole : A) en hommage à André-Marie Ampère. On a donc $1 \text{ A} = 1 \text{ C.s}^{-1}$

On peut exprimer l'intensité du courant électrique en fonction des caractéristiques de l'écoulement des porteurs de charge, à savoir leur vitesse moyenne et leur densité volumique. Pour simplifier la démonstration, supposons un seul type de porteurs se déplaçant tous à la vitesse moyenne v . Notons ρ leur densité volumique de charge (en C.m^{-3}). Considérons une section (S) orientée par la normale \vec{n} et calculons la quantité de charge la traversant pendant une durée dt .

Tous les porteurs de charge qui traversent l'élément infinitésimal dS de la section à l'instant $t + dt$, se trouvaient entre les instants t et $t + dt$ dans un cylindre de base dS et de génératrice $\vec{v}dt$, dont le

4.1 Conduction électrique . . .	29
Courant électrique	29
Loi d'Ohm locale	31
Modèle de Drude	31
Notion de résistance	32
4.2 Conducteur en équilibre	33
Généralités	33
Théorème de Coulomb	34
Le théorème de Gauss	35
4.3 Notion de capacité	37
Capacité d'un conducteur	37
Les condensateurs	38
Condensateur plan	39
Énergie d'un condensateur	41

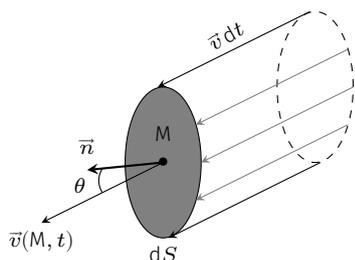


FIG. 4.1 : Calcul du débit de charge traversant une section.

volume s'écrit $d\tau = dS dt \vec{v} \cdot \vec{n}$. Ainsi, la quantité de charge d^2q qui traverse la section dS entre t et $t + dt$ vaut $d^2q = \rho d\tau$. En intégrant sur toute la section, on trouve

$$dq = dt \iint_{(S)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Mathématiquement, l'intensité s'interprète donc comme le flux d'un vecteur $\vec{j} = \rho \vec{v}$ appelé **densité de courant électrique** :

$$\begin{aligned} I(t) &= \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} dS \\ [A] &= [A \cdot m^{-2}] \times [m^2] \end{aligned} \quad \heartsuit \quad (4.1)$$

Si le courant est réparti uniformément, le vecteur densité de courant est constant sur la section S et l'intégrale se réduit à :

$$I = \vec{j} \cdot \vec{n} S$$

Dans le cas où plusieurs porteurs de charge transportent le courant il faut sommer toutes les contributions :

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i \quad \heartsuit \quad (4.2)$$

Arrêtons nous un instant sur les ordres de grandeur. Le TAB. 4.1 donne quelques valeurs d'intensité que l'on rencontre dans le quotidien. Es-

TAB. 4.1 : Quelques ordres de grandeur

Ordre de grandeur	Phénomène
1 mA	seuil de perception chez l'humain
75 mA	seuil de fibrillation cardiaque irréversible
1A	fonctionnement d'une lampe halogène
10 A	radiateur électrique en fonctionnement
1 kA	alimentation d'un moteur de locomotive
1-100 kA	courant de foudre

sayons d'estimer la vitesse des porteurs de charge dans une installation domestique. Par exemple, un fil de cuivre de section $s = 2,5 \text{ mm}^2$ supporte un courant d'intensité $I_{\max} = 20 \text{ A}$ (normes françaises). La densité de courant correspondante vaut

$$j = \frac{I_{\max}}{s} = 8.10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

Le cuivre a pour densité $d = 8,96$ et une masse atomique $m = 63,5 \text{ u.a.}$. De plus, chaque atome de cuivre libère un électron libre. Ainsi, 1 m^3 pèse $8,96 \cdot 10^3 \text{ kg}$ ce qui correspond à $8,96 \cdot 10^3 / 63,5 \cdot 10^{-3}$ mole de cuivre. La densité volumique des porteurs de charge vaut donc

$$\rho = \frac{8,96 \cdot 10^3}{63,5 \cdot 10^{-3}} \times 6,02 \cdot 10^{23} \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$$

la vitesse moyenne des électrons est alors donnée par $v = j/\rho = 0,6 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. La vitesse moyenne correspondant au transport de l'électricité est très faible devant la vitesse d'agitation thermique qui est de l'ordre de $10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On peut aussi noter que si le fil est traversé par un courant alternatif de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ et d'intensité maxi-

20 A, le déplacement moyen des électrons libres oscillera avec une amplitude

$$A = \frac{v}{2\pi f} = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{100 \times \pi} \simeq 2 \mu\text{m}$$

Loi d'Ohm locale

Un conducteur soumis à un champ électrique \vec{E} est le siège d'un courant électrique de densité de courant

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (4.3)$$

où γ désigne la **conductivité électrique** et s'exprime en siemens par mètre ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$). Elle dépend du conducteur, de la température et de la pression. Par exemple, dans les métaux, γ diminue quand la température augmente. Le TAB. 4.2 donne quelques valeurs de conductivités à 20°C. Notez le rapport d'échelle entre les isolants et les conducteurs.

Bons conducteurs		Mauvais conducteurs		Isolants	
Substance	γ ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$)	Substance	γ ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$)	Substance	γ ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$)
Argent	$6,1 \cdot 10^7$	Eau de mer	0,2	Huile minérale	$2 \cdot 10^{-11}$
Cuivre	$5,8 \cdot 10^7$	Silicium	$4,3 \cdot 10^{-4}$	Verre Pyrex	10^{-15}
Or	$4,5 \cdot 10^7$	Eau distillée	$2 \cdot 10^{-4}$	Quartz	$2 \cdot 10^{-17}$

TAB. 4.2 : Ordres de grandeur de conductivités électriques.

Modèle de Drude

En 1900, Paul Drude propose un modèle classique qui explique qualitativement la conduction électrique. Ce modèle repose sur les hypothèses suivantes.

1. Approximation des électrons libres : les électrons de conduction forment un *gaz parfait de particules chargées indépendantes* (malgré la présence des ions métalliques). En l'absence de champ extérieur, ces électrons libres ne ressentent aucune force en moyenne et se déplacent en ligne droite du fait de l'agitation thermique.
2. Les électrons sont diffusés par les défauts cristallins. Après chaque collision, la vitesse est redistribuée de façon aléatoire.
3. Le temps de libre parcours moyen ou temps de relaxation τ est la durée moyenne entre 2 collisions. τ est indépendant de la vitesse des électrons. Son ordre de grandeur est 10^{-14} s.

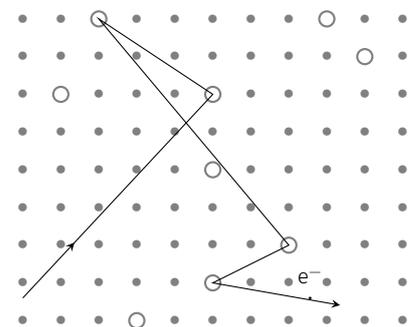


FIG. 4.2 : Modèle de Drude.

Dans ce modèle, entre deux collisions, la vitesse d'un électron soumis à un champ électrique extérieur \vec{E} , vérifie la seconde loi de Newton (modèle classique) :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \quad \text{soit} \quad \vec{v} = -\frac{e\vec{E}}{m_e} t + \vec{v}_0$$

où \vec{v}_0 désigne la vitesse après la dernière collision et t le temps compté à partir de la dernière collision. Le courant étant lié au mouvement d'ensemble, il faut effectuer une moyenne sur l'ensemble des électrons au même instant.

$$\vec{v}_{\text{moy}} = -\frac{e\vec{E}}{m_e} \langle t \rangle + \langle \vec{v}_0 \rangle$$

Or, la vitesse étant redistribuée dans toutes les directions après chaque collision, ceci de façon aléatoire, on a $\langle \vec{v}_0 \rangle = \vec{0}$. De plus, la moyenne $\langle t \rangle$ correspond à la moyenne des temps de collision c'est-à-dire τ . Finalement, on obtient une vitesse d'ensemble

$$\vec{v}_{\text{moy}} = -\frac{e\tau}{m_e} \vec{E}$$

La vitesse d'ensemble est proportionnelle au champ électrique. Le coefficient de proportionnalité s'appelle la *mobilité* μ :

$$\vec{v}_{\text{moy}} = \mu \vec{E}$$

Si l'on note n la densité d'électrons libres (en m^{-3}), on voit que le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique et s'écrit $\vec{j} = ne\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{ne^2\tau}{m_e} \vec{E}$. On retrouve donc la loi d'Ohm locale

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{ne^2\tau}{m_e}$$

Ce modèle permet d'expliquer, par exemple, pourquoi la conductivité des métaux diminue quand la température augmente. En effet, lorsque l'on chauffe un métal, les vibrations du réseau s'amplifient ce qui augmente la probabilité qu'il y ait collision et donc diminue le temps de relaxation.

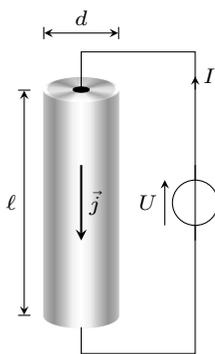


FIG. 4.3 : Cylindre conducteur.

Notion de résistance

Pour introduire la notion de résistance d'un conducteur, considérons un cylindre conducteur de longueur ℓ , de diamètre d et donc de section droite $s = \pi d^2/4$, soumis à une tension électrique U entre ses extrémités.

Faisons l'hypothèse que le courant électrique est uniforme sur la section et axial. La section étant constante, la densité de courant est constante le long du cylindre. De plus, la relation $j = \gamma E$ implique que le champ électrique est axial et constant le long du conducteur. L'intensité électrique vaut alors $I = js = \gamma E s$ et la tension électrique entre les extrémités vaut $U = \int E d\ell = E\ell$. Le rapport des deux relations permet d'obtenir la loi d'Ohm pour un fil conducteur cylindrique :

$$U = RI \quad \text{avec} \quad R = \frac{1}{\gamma} \frac{\ell}{s} \quad \heartsuit \quad (4.4)$$

De manière générale, la loi $U = RI$ constitue la *loi d'Ohm intégrale* et R désigne la résistance du conducteur dont l'expression dépend

de la conductivité **et** de la géométrie. La résistance s'exprime en ohm (symbole Ω) en hommage à Georg Ohm.

Application – La thermistance

L'inverse de la conductivité d'un métal, appelée résistivité, varie linéairement avec la température ($\frac{1}{\gamma} = \rho_0 + \alpha T$) de telle sorte que la résistance peut servir de thermomètre une fois étalonné. Le fil de platine est couramment utilisé ainsi : on parle de thermomètre à résistance de Platine.

4.2 Conducteurs en équilibre électrostatique

On s'intéresse dorénavant à l'équilibre de conducteurs électrisés (chargés) placés dans le vide.

Propriétés des conducteurs en équilibre

À l'équilibre, un conducteur n'est soumis à aucun mouvement macroscopique. Notamment, il n'y a pas de courant électrique macroscopique. Par conséquent,

$$\vec{j} = \vec{0}$$

Bien évidemment, à l'échelle de l'atome les électrons sont en mouvement, mais à l'échelle mésoscopique¹ ces mouvements incessants se compensent en moyenne. Donc, selon la loi d'Ohm, il ne règne aucun champ électrique au sein du conducteur :

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0} \quad \heartsuit \quad (4.5)$$

Insistons sur le fait qu'il s'agit ici du champ électrique local moyenné à l'échelle mésoscopique. Bien entendu, à l'échelle de l'atome, règne un champ électrique extrêmement important et fluctuant.

À l'intérieur du conducteur, le potentiel doit vérifier $\vec{E}_{\text{int}} = -\overrightarrow{\text{grad}}V_{\text{int}} = \vec{0}$ soit

$$V_{\text{int}} = C^{\text{te}} \quad \heartsuit \quad (4.6)$$

Le potentiel électrique est uniforme au sein du conducteur à l'équilibre. Autrement dit, **le conducteur à l'équilibre est un volume équipotentiel**. Les lignes de champ électrique étant perpendiculaires aux équipotentielles, on voit ici que le champ électrique au voisinage extérieur du conducteur est normal à la surface.

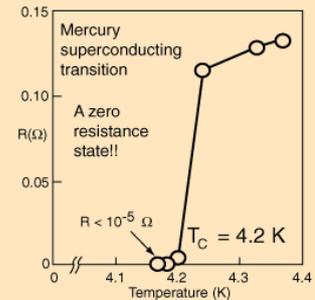
En vertu du théorème de Gauss, que nous verrons ultérieurement, le fait que le champ électrique soit nul à l'intérieur du conducteur implique que la densité de charge volumique est nulle partout.

$$\rho_{\text{int}} = 0 \quad \heartsuit \quad (4.7)$$

Cela signifie que tout apport de charge à un conducteur va se répartir à la surface de celle-ci de façon à créer un champ électrique nul à l'intérieur. On caractérise alors le conducteur par sa distribution

Supraconduction

En 1911, Kamerlingh Onnes (Prix Nobel 1913), découvre le phénomène de supraconduction sur le mercure : en dessous d'une certaine température, dite température critique et notée T_c , certains métaux perdent complètement leur résistivité[4].



La supraconduction ouvre des perspectives de transport de l'électricité sans perte d'énergie (voir effet joule en électricité) à condition de trouver un supraconducteur de température critique située dans le domaine de température ambiante.

Depuis 1911, ce phénomène fut découvert dans de nombreux métaux et alliages avec des records de température critique qui progressèrent doucement.

Un grand saut fut fait en 1986 avec la découverte d'une nouvelle famille de supraconducteurs : les cuprates, composés de couches d'oxyde de cuivre. Récemment, la barre des -100°C a été franchie puisqu'un matériau à base de sulfure d'hydrogène a conservé sa supraconductivité jusqu'à -73°C . Il reste donc encore du chemin à parcourir avant de trouver un matériau supraconducteur à température ambiante.

¹ : Échelle intermédiaire entre l'échelle atomique et macroscopique. Typiquement c'est l'échelle du micromètre.

de charge surfacique $\sigma(P)$ où P désigne un point de la surface du conducteur. Le champ électrique à la surface du conducteur dépend donc de la manière dont se répartissent les charges en surface.

Théorème de Coulomb

Plaçons nous à l'extérieur d'un conducteur à l'équilibre tout en restant dans le voisinage immédiat d'un point P de sa surface. Dans ce cas, le champ électrique produit ne dépend que de la densité surfacique en ce point. C'est ce qu'énonce le théorème de Coulomb.

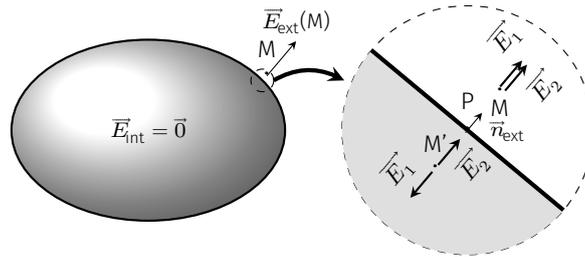


Fig. 4.4 : Champ au voisinage de la surface d'un conducteur.

Pour le montrer, plaçons-nous en un point M au voisinage d'un conducteur. On peut considérer que le champ créé en M est le résultat de deux contributions :

$$\vec{E}_{\text{ext}}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$$

où \vec{E}_1 est le champ créé par une portion de conducteur suffisamment petite pour qu'on puisse l'assimiler à un plan tangent, et \vec{E}_2 celui dû au reste du conducteur. On a vu qu'un plan infini uniformément chargé produit un champ électrique $\vec{E} = \sigma/2\epsilon_0 \vec{n}$ où \vec{n} est le vecteur normal au plan. Ce résultat reste valide pour un plan fini de taille caractéristique L tant que l'on se place à une distance $d \ll L$ du plan. Supposons donc M suffisamment proche du conducteur pour autoriser cette approximation puis notons \vec{n}_{ext} le vecteur unitaire normal à la surface du conducteur et dirigé vers l'extérieur. On a donc

$$\vec{E}_{\text{ext}}(M) = \frac{\sigma(P)}{2\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}} + \vec{E}_2(M)$$

Par ailleurs, si l'on considère le point M' symétrique de M par la symétrie plane passant par P , on a également

$$\vec{E}_{\text{int}}(M') = -\frac{\sigma(P)}{2\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}} + \vec{E}_2(M')$$

Nous savons qu'à l'intérieur du conducteur le champ électrique est nul ce qui implique $\vec{E}_2(M') = \sigma(P)/\epsilon_0 \vec{n}_{\text{ext}}$. Or, par continuité, $\vec{E}_2(M') = \vec{E}_2(M)$ puisque M et M' sont infiniment voisins². Finalement, on trouve $\vec{E}_{\text{ext}}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}}$.

2 : Pour être précis, on montre que le champ électrique est continu sauf si le trajet MM' coupe une distribution surfacique de charge, ce qui n'est pas le cas ici, car on s'intéresse au champ créé par la surface conductrice à laquelle on a retiré la portion contenant P .

Théorème de Coulomb

Dans un conducteur à l'équilibre, le champ électrique intérieur est nul, le potentiel électrique est uniforme et les charges se répartissent à la surface du conducteur. Il règne alors au voisinage immédiat de la surface chargée (et à l'extérieur) un champ électrique :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}}$$

Le théorème de Gauss et ses conséquences

Le théorème de Gauss est un théorème très général qui relie le flux électrique et la quantité de charge électrique.

Par définition, le flux du champ électrique \vec{E} à travers une surface fermée S vaut

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \iint_S \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \, dS \quad \heartsuit \quad (4.8)$$

où \vec{n} désigne un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface en M et dirigé vers l'extérieur.

Pour introduire le théorème de Gauss, calculons le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle, à travers une sphère de rayon r centrée sur la charge. Le champ électrique en un point M de la surface sphérique vaut

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

où \vec{u}_r est le vecteur unitaire du système sphérique. La normale à la surface est également suivant \vec{u}_r de sorte que le flux s'écrit

$$\Phi = \iint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r \, dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iint dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Autrement dit, le flux est proportionnel à la quantité de charge enfermée par la sphère mais ne dépend pas de la taille de la sphère. On peut se demander ce que devient le flux lorsque la surface qui enferme la charge n'est plus sphérique. On trouve un résultat surprenant puisque le flux reste identique : tant que la surface englobe la charge, $\Phi = q/\epsilon_0$. En revanche, si la surface n'englobe pas la charge, on obtient toujours $\Phi = 0$.

Si maintenant on envisage une distribution quelconque de charges et une surface fermée \mathcal{S} englobant une partie des charges, seule la quantité de charge q_{int} intérieure à \mathcal{S} contribue au flux : c'est le sens du théorème de Gauss.

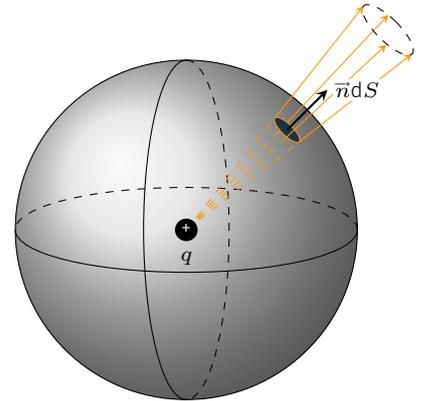


FIG. 4.5 : Calcul du flux du champ électrique que crée une charge ponctuelle à travers une sphère de rayon r .

Théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée quelconque, est proportionnel à la quantité de charge enfermée par cette surface. La constante de proportionnalité vaut, dans le Système International, $\frac{1}{\epsilon_0}$.

$$\Phi = \iint_S \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \, dS = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (4.9)$$

On peut vérifier que le théorème de Gauss est bien compatible avec le théorème de Coulomb. Imaginons que la surface S englobe un conducteur quelconque de charge totale q de façon à ce qu'elle soit infiniment proche de la surface du conducteur. D'après le théorème de Coulomb, $E = \sigma(P)/\epsilon_0 \vec{n}$ de sorte que

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{P \in S} \sigma(P) \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ce qui est bien conforme au théorème de Gauss.

Voyons maintenant quelques conséquences du théorème de Gauss.

- ▶ Isolons par la pensée un petit volume V situé à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre. Le champ électrique y étant nul, son flux à travers la surface qui délimite V est également nul. Par conséquent, la charge intérieure au volume est nulle. Ainsi, on peut affirmer que tout volume (mésoscopique) contient une charge nulle, ce qui revient à dire que la densité volumique de charge est partout nulle, à l'intérieur d'un conducteur; ce qui démontre une des propriétés des conducteurs à l'équilibre.
- ▶ Considérons maintenant une sphère conductrice chargée (charge q) de rayon R . Par symétrie, la charge se répartit uniformément en surface d'où une densité surfacique constante $\sigma = q/(4\pi R^2)$. On connaît le champ électrique au voisinage de la sphère, mais que vaut-il à une distance r quelconque? Pour cela il suffit d'appliquer le théorème de Gauss en choisissant pour surface fermée S la sphère de rayon r et de même centre que le conducteur. On a

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S E \, dS$$

car \vec{E} est colinéaire à $\vec{n} = \vec{u}_r$ compte tenu de la symétrie sphérique. Par ailleurs, l'invariance par rotation implique que le champ ne dépend que de r . Ainsi, E est constant le long de la surface sphérique d'intégration. Il vient alors

$$\phi = \iint_S E \, dS = E \iint_S dS = E 4\pi r^2$$

Du théorème de Gauss, il découle donc

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{si } r > R$$

Autrement dit, une boule conductrice de charge q produit à l'extérieur le même champ qu'une charge ponctuelle q située en

son centre.

- Supposons maintenant un conducteur enfermant une cavité dans laquelle se trouve une charge ponctuelle q . Le caractère ponctuelle n'a pas d'importance ici; il pourrait très bien s'agir d'un petit volume quelconque chargé. Cette charge a pour effet d'attirer ou de repousser (ça dépend de son signe) les électrons libres du conducteur de sorte que la surface interne du conducteur présente une distribution de charge q' . Pour trouver q' , il suffit d'utiliser le théorème de Gauss en choisissant une surface fermée entourant la cavité et située dans le conducteur. Puisqu'en tout point de la surface de Gauss le champ électrique est nul, alors le flux électrique l'est également. Par conséquent, en vertu du théorème de Gauss, $q' + q = 0$: la surface interne se remplit d'une charge opposée; c'est ce qu'on appelle l'influence totale.
- Si maintenant on retire la charge q , dans ce cas $q' = 0$. Il est facile de montrer que la densité de charge est partout nulle sur la surface interne du conducteur. En effet, si la surface interne présente une distribution de charge alors elle contient des charges + et - (puisque $q' = 0$). Les lignes de champ partiraient alors des charges + pour rejoindre les charges - (elles ne peuvent pas s'arrêter dans la cavité puisqu'il n'y a pas de charges). Dans ce cas, on aurait des lignes de champ qui partiraient d'un point porté au même potentiel que le point d'arrivée. Or, par nature ($\vec{E} = -\text{grad}V$), une ligne de champ ne peut visiter que des points de potentiel décroissant, ce qui infirme l'hypothèse de départ. Finalement, dans une cavité vide de charge, la surface interne est également vide de charge ce qui implique un champ nul et un potentiel constant et égal à celui du conducteur. Cela signifie par exemple que toute perturbation électrique produite à l'extérieur du conducteur n'a strictement aucune action à l'intérieur de la cavité : c'est l'effet « cage de Faraday ».

4.3 Notion de capacité

Capacité d'un conducteur

Portons un conducteur \mathcal{C} au potentiel V_0 et notons la charge Q_0 qui se répartit en surface. Ce conducteur produit à l'extérieur un potentiel

$$V(M) = \iint \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r}$$

en prenant comme convention $V(\infty) = 0$. Les charges se répartissent donc de façon à ce que $V(M) = V_0$ pour tout point $M \in \mathcal{C}$.

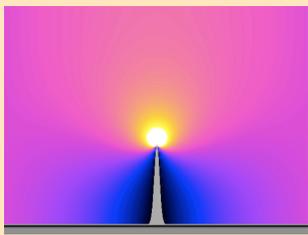
Définissons maintenant un potentiel $V'(M) = \lambda V(M)$ avec λ un nombre réel. Ce potentiel vérifie la condition aux limites $V'(M \in \mathcal{C}) = \lambda V_0$. C'est donc le potentiel produit par le conducteur mis au potentiel $V'_0 = \lambda V_0$. Notons σ' la nouvelle distribution de charges. On a

$$V'(M) = \iint \frac{\sigma' dS}{4\pi\epsilon_0 r} = \lambda V(M) = \lambda \iint \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \forall M$$

3 : **Michael Faraday (1791 - 1867)** : physicien et chimiste anglais. En 1831, il découvre l'induction électromagnétique qui permettra la construction des dynamos. En 1833, il établit la théorie de l'électrolyse. Il travailla également sur le phénomène d'électroluminescence, le diamagnétisme et l'action d'un champ magnétique sur la lumière polarisée.

Effet de pointe

Lorsqu'on soumet un conducteur à un potentiel V , les charges ne se répartissent pas toujours uniformément. L'exemple ci-contre montre que la charge varie comme le rayon de courbure et donc que la densité de charge varie comme l'inverse du rayon de courbure. C'est pourquoi, le champ électrique devient très important au voisinage des pointes conductrices, là où le rayon de courbure est petit. La simulation ci-dessous illustre ce phénomène. Cet effet, dit *effet de pointe*, permet d'expliquer pourquoi la foudre tombe le plus souvent sur des corps pointus (clochers, arbres) et notamment sur les paratonnerres qui servent précisément à cela : près d'une pointe le champ électrique peut être suffisamment important pour ioniser localement l'air et produire un canal conducteur qui peut entrer en contact avec un canal conducteur descendant ; un éclair se produit alors.



ce qui implique $\sigma' = \lambda\sigma$ soit $Q'_0 = \lambda Q_0$.

Capacité d'un conducteur

Le rapport

$$\frac{Q'_0}{V'_0} = \frac{Q_0}{V_0} = C > 0$$

est une constante caractéristique de la géométrie du conducteur. C désigne la capacité du conducteur seul. Elle mesure la capacité d'un conducteur à stocker une quantité de charge sous un potentiel électrique donné. La capacité se mesure en **farad** (F) en hommage à Faraday³.

Exemple – Capacité d'une sphère conductrice de rayon R

Lorsque l'on porte un conducteur sphérique au potentiel V_0 , du fait de la symétrie sphérique, les charges se répartissent de façon uniforme : σ est constant. Le potentiel électrique V_c produit au centre de la boule se calcule aisément :

$$V_c = \iint \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R}$$

La capacité d'un conducteur sphérique s'écrit donc

$$C = \frac{Q_0}{V_0} = \frac{Q_0}{V_c} = 4\pi\epsilon_0 R$$

La capacité d'une boule conductrice est proportionnelle à son rayon. Notez que si l'on prend un conducteur sphérique de rayon égal au rayon de la Terre, on trouve une capacité $C = 0,7 \text{ mF}$, ce qui montre que le farad n'est pas une unité très adaptée ; aussi utilise-t-on ses sous multiples.

Les condensateurs

Considérons deux conducteurs \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . On électrise \mathcal{C}_1 en le portant au potentiel V_1 : il s'entoure alors d'une charge Q_1 (positivement pour fixer les idées). Quant à \mathcal{C}_2 , il est neutre. Approchons maintenant le conducteur chargé vers le conducteur neutre : le champ électrique créé par \mathcal{C}_1 éloigne alors les charges positives et attire les charges négatives. Ainsi, \mathcal{C}_2 se recouvre d'une distribution de charge non uniforme telle que $\int \sigma dS = 0$. Si maintenant, le conducteur \mathcal{C}_2 est mis à la Terre ($V_2 = 0$), les charges positives vont être neutralisées par des charges provenant de la Terre. Le résultat est que le conducteur \mathcal{C}_2 se charge négativement : on dit que le conducteur s'est chargé par *influence partielle*. On a la relation

$$Q_2 = C_{21} V_1$$

où $C_{21} < 0$ désigne le coefficient d'influence.

Examinons maintenant le cas particulier où le conducteur \mathcal{C}_2 entoure \mathcal{C}_1 . Dans cette configuration, toutes les lignes de champ issues de \mathcal{C}_1 arrivent nécessairement sur \mathcal{C}_2 . La surface intérieure de \mathcal{C}_2 se recouvre d'une charge $Q_{2 \text{ int}}$ de signe opposé à celle que contient \mathcal{C}_1 .

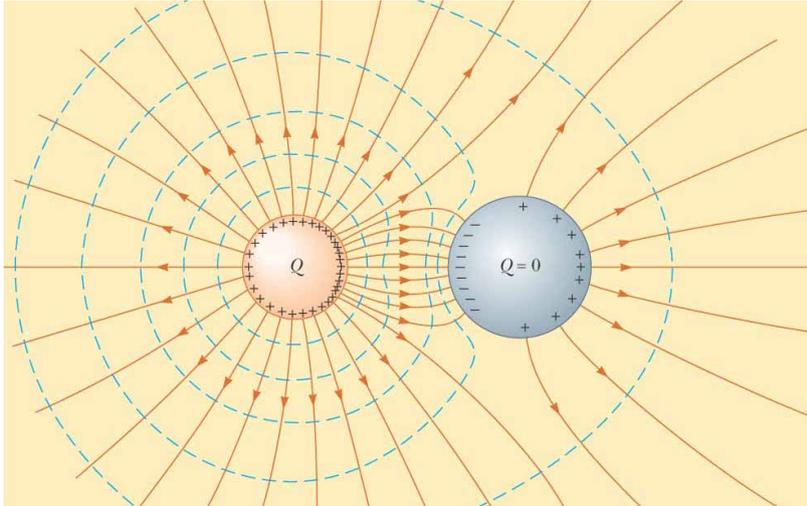


FIG. 4.6 : Influence partielle. ©2004 Thomson - Brooks/Cole

Par ailleurs, en vertu du théorème de Gauss on a

$$Q_1 = -Q_{2 \text{ int}}$$

On parle d'*influence totale* et l'ensemble des deux conducteurs forme alors ce que l'on appelle un *condensateur constitué de deux armatures conductrices*.

La capacité d'un condensateur mesure l'aptitude à stocker une quantité de charge sur l'armature interne. En effet, on montre que si l'on soumet le condensateur à une tension $U = V_1 - V_2$, l'armature interne se recouvre d'une charge

$$Q_1 = CU \quad \heartsuit \quad (4.10)$$

où C mesure la capacité du condensateur et ne dépend que de sa géométrie. La capacité d'un condensateur se mesure, comme la capacité d'un conducteur, en farad (symbole : F). L'ordre de grandeur de C est variable; ça va *grosso modo* de 10^{-12} F à 10^{-3} F.

Capacité d'un condensateur plan

On forme un condensateur plan en approchant deux conducteurs plans soumis à une différence de potentiel. Sur la figure ci-contre, l'armature du bas est soumise à un potentiel positif V_+ et celle du haut à un potentiel V_- de sorte que la tension qui règne entre les armatures vaut $U = V_+ - V_-$. Sur les faces en regard se condensent des charges de signe opposé : on a influence totale. En revanche, sur les faces externes des armatures, la densité de charge est quasi nulle. En effet, comme on peut le voir sur la carte d'intensité du champ, le champ électrique est intense entre les armatures et quasi-nul à l'extérieur. On remarque également qu'entre les armatures, les lignes de champ sont rectilignes ce qui signifie que le champ est uniforme comme on peut également le voir sur la carte d'intensité. Notez enfin ce qui se passe aux bords des armatures : les charges ont tendance à se concentrer sur les bords par effets de pointe, ce qui explique la valeur intense du champ près des bords. Le caractère uniforme du

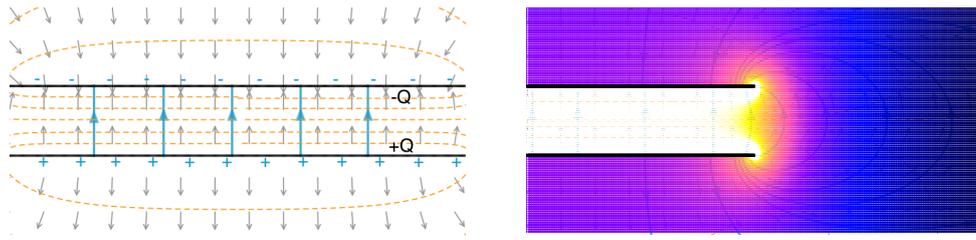


FIG. 4.7 : À gauche : condensateur plan. À droite : effets de bord. Pour une animation interactive, voir <https://femto-physique.fr/simulations/condensateur-plan.php>.

champ n'est donc valable qu'entre les armatures et tant qu'on reste éloigné des bords.

Calculons la capacité de ce condensateur en supposant les armatures suffisamment proches pour pouvoir utiliser le théorème de Coulomb. Le champ électrique qui règne entre les armatures vaut donc $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0 \vec{n}_{\text{ext}}$. La tension qui règne entre les armatures s'obtient en intégrant ce champ le long d'une ligne de champ :

$$U = V_+ - V_- = \int_{A_+}^{A_-} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e$$

où e désigne l'espacement entre les armatures. De plus, si l'on néglige les *effets de bord*, on peut considérer que la répartition des charges est uniforme, d'où $Q = \sigma S$ avec S l'aire de chaque face en regard et $\pm Q$ les charges des faces en influence totale. Ainsi, on trouve

$$Q = \left(\frac{\epsilon_0 S}{e} \right) U$$

Un condensateur plan, possède donc une capacité

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad \heartsuit \quad (4.11)$$

La relation obtenue indique que plus l'espacement est petit, plus le phénomène de condensation est important.

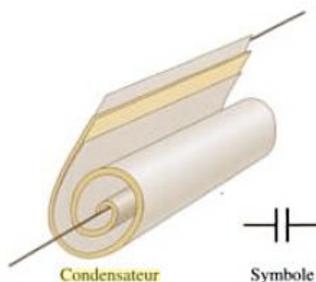


FIG. 4.8 : Fabrication d'un condensateur plan réel

Rôle du diélectrique – La formule précédente est valable si l'espace inter-armatures est vide. En pratique, on enroule deux rubans métalliques (aluminium ou étain) jouant le rôle des armatures, que l'on sépare par deux rubans isolants (papier paraffiné, plastique). La présence de cet isolant, dit diélectrique, a pour effet d'augmenter la capacité du condensateur formé suite au phénomène de polarisation électrique (voir cours Électromagnétisme II). On montre que la capacité s'écrit sous la forme

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad \text{avec} \quad \epsilon = \epsilon_0 \times \epsilon_r$$

où ϵ_r désigne la *permittivité diélectrique relative* qui dépend du matériau diélectrique utilisé.

Diélectrique	ϵ_r	Diélectrique	ϵ_r
vide	1	Mica	3-6
air	1,0006	Bois	2,5-8
paraffine	2,5-3,5	Porcelaine	6
huile	4	Glycérine	56
verre	5-10	Eau Pure	81

TAB. 4.3 : Permittivités diélectriques relatives de quelques matériaux.

Énergie stockée par un condensateur

Par définition, l'énergie d'un condensateur chargé W_E est l'énergie qu'il est susceptible de libérer lors de sa décharge, c'est-à-dire lorsqu'on ramène sa tension à zéro en reliant les deux armatures par un fil conducteur, par exemple.

Considérons l'armature interne au potentiel V_A et portant une charge Q . L'armature externe soumise au potentiel V_B porte, quant à elle, une charge interne $-Q$ et une charge externe Q' qui ne dépend que du potentiel V_B .

Lorsque le condensateur est chargé, l'énergie électrostatique du système de charge vaut :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i = \frac{1}{2} (QV_A - QV_B + Q'V_B)$$

On décharge le condensateur en augmentant le potentiel V_A à la valeur V_B : il n'y a plus de charge en influence mais il reste éventuellement une charge Q' sur la face externe de l'armature :

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i = \frac{1}{2} Q'V_B$$

Par définition, l'énergie électrostatique du condensateur W_E vaut

$$W_E = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} QU_{AB} = \frac{1}{2} CU_{AB}^2 \quad \heartsuit \quad (4.12)$$

Ce cours introduit la notion de champ magnétique en laissant de côté pour l'instant son origine. On se concentre ici sur les interactions magnétiques :

- ▶ l'interaction de Lorentz entre une charge et un champ magnétique;
- ▶ l'interaction de Laplace entre un conducteur parcouru par un courant électrique et un champ magnétique.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/interaction-magnetique.php>

5.1 Les aimants	43
Propriétés des aimants . .	43
Champ magnétique	43
5.2 Force de Lorentz	44
Définition du champ B . .	44
Particule dans un champ B	46
Quelques applications . .	47
5.3 Interaction avec les cou-	
rants	49
Force de Laplace	49
Effet Hall (1879)	50
Travail des forces de La-	
place	51
Actions sur un dipôle . .	53

5.1 Les aimants

Propriétés des aimants

La « pierre d'aimant » qui a la propriété d'attirer les petits morceaux de fer, est connue depuis l'antiquité grecque. On trouve cette pierre étonnante dans la région de Magnésie, en Asie Mineure. On sait aujourd'hui qu'elle est formée essentiellement d'oxyde de Fer Fe_3O_4 que l'on appelle magnétite. Façonnée et polie en forme de cuiller, elle est utilisée en Chine dès le III^e siècle à des fins divinatoires. Il faut attendre l'an Mille environ pour voir apparaître les premières boussoles. Elle est adoptée par les navigateurs arabes puis européens pour s'orienter en mer. L'usage du compas de marine devient primordial avec les grandes explorations à la Renaissance. Sa pièce principale est une aiguille d'acier que l'on a aimantée par frottement contre une pierre d'aimant. Les aimants présentent toujours au moins deux

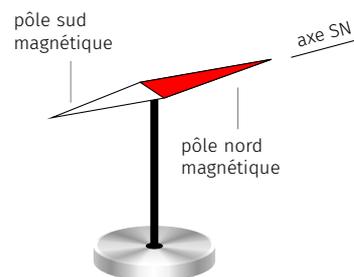


FIG. 5.1 : Aiguille aimantée

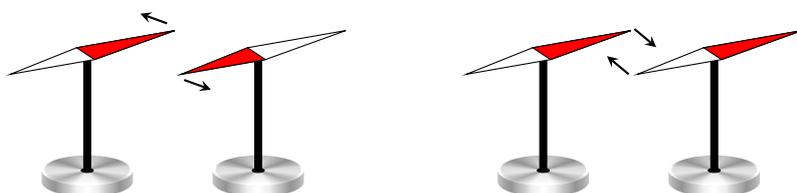


FIG. 5.2 : Interactions entre aimants.

pôles, appelés pôle sud et pôle nord. Lorsque l'on approche deux aimants, on met aisément en évidence deux types d'interaction : deux pôles de même nature se repoussent alors que deux pôles de nature différente s'attirent.

Notion de champ magnétique

Expérience

En un point de la surface terrestre et en l'absence d'aimants et/ou de circuits électriques, l'aiguille d'une boussole s'oriente dans la direction Sud-Nord. Approchons un aimant : l'orientation de la boussole s'en trouve modifiée. Déplaçons la boussole autour de l'aimant : la direction de la boussole varie d'un point à l'autre. Enfin, perturbons l'aiguille de la boussole : elle se met à osciller autour de la direction indiquée initialement. Si l'on rapproche l'aimant, l'aiguille oscille de plus en plus vite.

1 : Il s'agit du nord magnétique terrestre situé dans l'océan arctique, à quelques degrés de latitude du Nord géographique

Interprétation – Sur Terre, il règne un champ de force magnétique qui oriente toutes les boussoles dans l'axe Sud-Nord. Par convention, le pôle qui indique le Nord¹ est appelé pôle nord de la boussole, l'autre étant alors le pôle sud.

Un aimant modifie les propriétés magnétiques de l'espace : il crée un champ magnétique. Ce champ présente une direction donnée par la boussole et un sens donné par l'axe SN de la boussole.

Enfin, plus ce champ est important, plus l'aiguille est forcée de s'aligner avec ce champ ce qui explique l'augmentation de la fréquence des oscillations.

Conclusion

L'espace est caractérisé par un champ de force qui présente les attributs d'un vecteur que l'on nomme vecteur champ magnétique et que l'on note généralement $\vec{B}(M)$. Ce champ est détectable par une boussole.

Une façon de visualiser le champ magnétique que produit un aimant consiste à disperser autour, de la limaille de fer : les aiguilles de fer s'aimantent puis se comportent comme de petites boussoles qui s'orientent suivant le champ magnétique local.

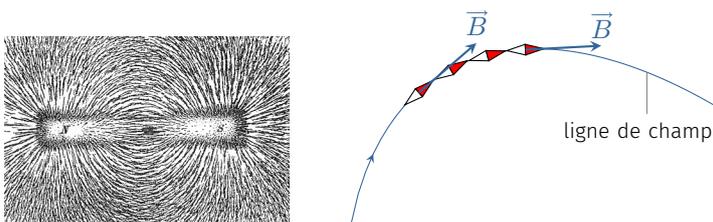


FIG. 5.3 : Spectre magnétique : les grains de limaille de fer se comportent comme de petites boussoles, matérialisant ainsi les lignes de champ.

5.2 Force de Lorentz

Définition du champ magnétique

Le champ magnétique est défini à partir de la force de déflexion que ressent une particule chargée en présence d'une source de champ magnétique.

Considérons un tube de Crookes dans lequel on produit un faisceau d'électrons entre deux électrodes. Les électrons, en entrant en collision avec les quelques molécules du gaz résiduel du tube, produisent une lumière de fluorescence, rendant ainsi visible leur trajectoire.

Approchons maintenant un aimant perpendiculairement à la vitesse initiale : le faisceau est alors dévié tout en restant dans un plan perpendiculaire au champ magnétique. Ainsi, une charge électrique en mouvement ressent, en plus de la force électrique, une force de nature magnétique. L'analyse de la trajectoire montre que la force électromagnétique que subit une particule chargée en mouvement s'écrit

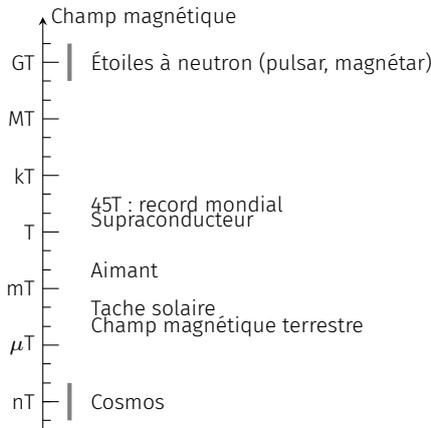
$$\vec{f} = \underbrace{q\vec{E}}_{\text{force électrique}} + \underbrace{q\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\text{force magnétique}} \quad \heartsuit \quad (5.1)$$

ce qui définit le champ magnétique \vec{B} .

Dans le Système International d'Unités, le champ magnétique s'exprime en Tesla en hommage à Nikola Tesla². L'analyse dimensionnelle montre que

$$[f] = ILB \implies 1 \text{ T} = 1 \text{ N}\cdot\text{A}^{-1}\text{m}^{-1}$$

La figure ci-dessous donne quelques ordres de grandeurs du champ magnétique.



La force magnétique étant constamment perpendiculaire au vecteur vitesse, elle ne fournit pas de puissance mécanique et donc pas de travail.

$$\vec{f} \perp \vec{v} \implies \mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$$

Par conséquent, en vertu du théorème de l'énergie cinétique, une particule soumise uniquement à la force magnétique conserve sa vitesse constante en norme :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \mathcal{P} = 0$$

La force magnétique incurve la trajectoire sans modifier la vitesse de la particule.

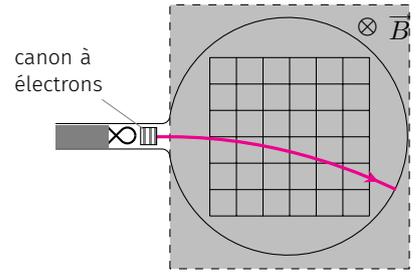


FIG. 5.4 : Déflexion magnétique.

2 : **Nikola Tesla (1856-1943)** : ingénieur électricien croate (Empire Austro-hongrois) naturalisé américain, il est considéré comme l'un des plus grands inventeurs du 20ème siècle avec plus de 900 brevets à son actif. Il fut l'opposant à Edison concernant le transport de l'électricité et partisan de l'utilisation des courants alternatifs.

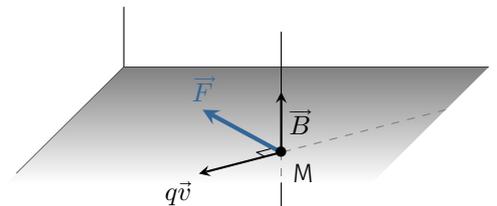


FIG. 5.5 : Force magnétique.

La force magnétique ne travaille pas. Cependant, si le champ magnétique varie dans le temps, il apparaît un champ électrique lié à la variation du champ magnétique (phénomène d'induction) qui, lui, travaille.

Particule dans un champ magnétique uniforme

Étudions le mouvement d'une particule de charge q située dans une zone où règne un champ magnétique uniforme et permanent \vec{B} . On néglige la force de gravitation devant la force de Lorentz.

Dans la base de Frenet, l'accélération de la particule s'écrit (cf. Mécanique du point - Cinématique) :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n} = \frac{v^2}{R} \vec{n} \quad \text{car } v = C^{te}$$

Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, la seconde loi de Newton $f = ma$ donne

$$|q| v B \sin \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

où α représente l'angle que fait le vecteur vitesse avec le vecteur champ magnétique. Trois cas de figure se présentent :

- ▶ $\alpha = 0$ ou π : la force magnétique est nulle et le vecteur vitesse reste constant en direction et en norme. Le mouvement est rectiligne uniforme.
- ▶ $\alpha = \pi/2$: la vitesse n'a pas de composante suivant \vec{B} , et la force est perpendiculaire au champ magnétique. Ainsi, le mouvement s'effectue dans le plan formé par la vitesse \vec{v} et la force de Lorentz. Par ailleurs, le rayon de courbure vaut $R = \frac{mv}{|q|B}$. Ce rayon de courbure est constant si le champ magnétique est uniforme et permanent : la trajectoire est donc un cercle³ de rayon

$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad \heartsuit \quad (5.2)$$

Ce cercle est décrit à la vitesse angulaire

$$\omega_c = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m}$$

qui ne dépend que du rapport q/m et du champ magnétique. Cette vitesse angulaire est aussi appelée **pulsation cyclotron**.

- ▶ Dans les autres cas, il est facile de montrer que la composante de la vitesse suivant la direction du champ magnétique reste constante. Le mouvement se décompose alors en un mouvement uniforme suivant le champ magnétique et un mouvement circulaire dans un plan perpendiculaire. On obtient un **mouvement hélicoïdal** dont l'axe est le champ magnétique et le rayon de courbure

$$R = \frac{mv}{|q|B \sin \alpha}$$

3 : Une particule accélérée dissipe de l'énergie sous la forme d'un rayonnement électromagnétique, dit rayonnement cyclotron, et a pour effet une diminution de la vitesse –et donc du rayon de courbure– au cours du temps. Cet effet est négligé ici.

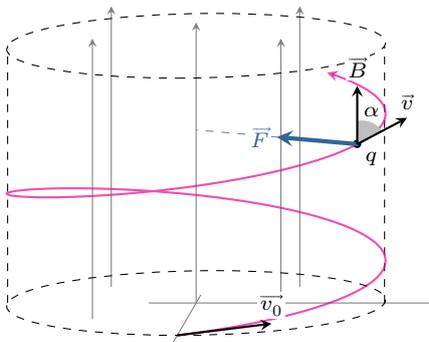


FIG. 5.6 : Mouvement hélicoïdal d'une particule de charge négative dans un champ magnétique.

La formule (5.2) peut s'écrire $R = \frac{p}{|q|B}$ avec p la quantité de mouvement de la particule. Cette formule a l'intérêt d'être applicable dans le cas où les particules sont relativistes.

Quelques applications

Le cyclotron – Le cyclotron est un accélérateur de particules inventé par l'américain Lawrence en 1932 (Prix Nobel 1939). Il est constitué de deux demi-cylindres creux, appelés « dees », séparés par un intervalle étroit. Dans les « dees », il règne un champ magnétique uniforme perpendiculaire à leur base. Une tension électrique sinusoïdale est appliquée entre les « dees » dans un plan perpendiculaire au champ magnétique.

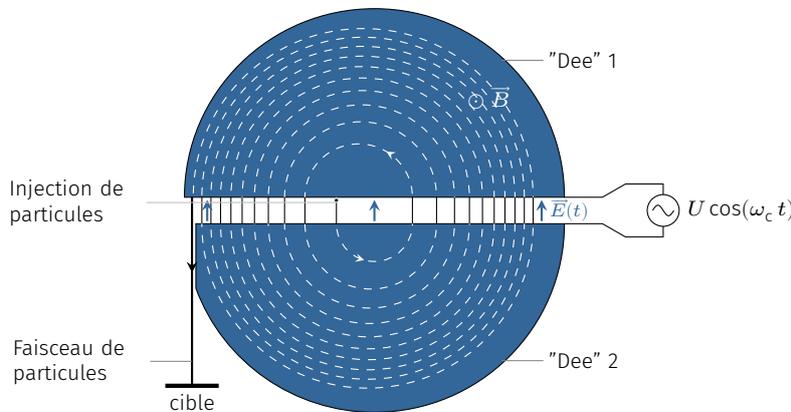


FIG. 5.7 : Principe du cyclotron (la charge est négative ici).

Le principe du cyclotron repose essentiellement sur le fait que la fréquence de révolution d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme est indépendante de la vitesse de la particule. On injecte au centre du dispositif des particules chargées, en général des protons ou des ions. La tension produite entre les « dees » accélère les particules. Ensuite, arrivées dans un des « dees », elles décrivent des portions de cercle à la vitesse angulaire $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$ indépendante de leur vitesse. La tension appliquée oscille à la fréquence cyclotron de sorte que les particules en sortant du « dee » sont à nouveau accélérées. Gagnant de la vitesse, ils décrivent dans le « dee » suivant un arc de cercle de rayon plus grand. Ainsi, à chaque tour, le rayon de courbure augmente jusqu'à atteindre le rayon maximum R_{\max} imposé par la taille du cyclotron. En sortie du cyclotron, le faisceau de particules accélérées est en général envoyé sur une cible.

La quantité de mouvement maximum des particules vaut alors

$$p = mv_{\max} = |q|BR_{\max}$$

L'énergie cinétique maximum s'écrit simplement

$$\mathcal{E}_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{q^2 B^2 R_{\max}^2}{2m}$$

Pour un proton par exemple, en prenant $B \approx 1$ T et $R_{\max} \approx 1$ m, on obtient $\mathcal{E}_c \approx 50$ MeV.

Le cyclotron est utilisé de nos jours pour produire des Radio-Isotopes utilisés en médecine nucléaire (radio-thérapie) et en recherche pour la physique nucléaire.

Le spectromètre de masse à analyseur magnétique – La spectrométrie de masse est une technique d'analyse permettant d'identifier les molécules d'un composé à analyser. Dans un spectromètre de masse à analyseur magnétique, on injecte les molécules dans une chambre d'ionisation : un bombardement électronique permet de briser les molécules de façon à former des fragments d'ions moléculaires positifs. Ces ions sont ensuite accélérés grâce à un champ électrique et un dispositif de filtrage garantit que les ions sortent avec la même vitesse v_0 . Ils entrent ensuite dans une zone où règne un champ magnétique uniforme produit par un électroaimant. Ces ions décrivent alors un arc de cercle de rayon $R = mv_0/|q|B$ avant d'être reçu sur un détecteur. La vitesse et le champ magnétique étant contrôlés, la position de l'impact est en fait une mesure du rapport q/m des ions détectés. En faisant varier le champ magnétique on détecte des ions de masse différentes (ions différents ou ions isotopes); l'enregistrement de l'intensité du signal en fonction de la masse s'appelle le *spectre de masse*. De ces informations il est possible d'en déduire la formule brute des molécules présents dans le composé.

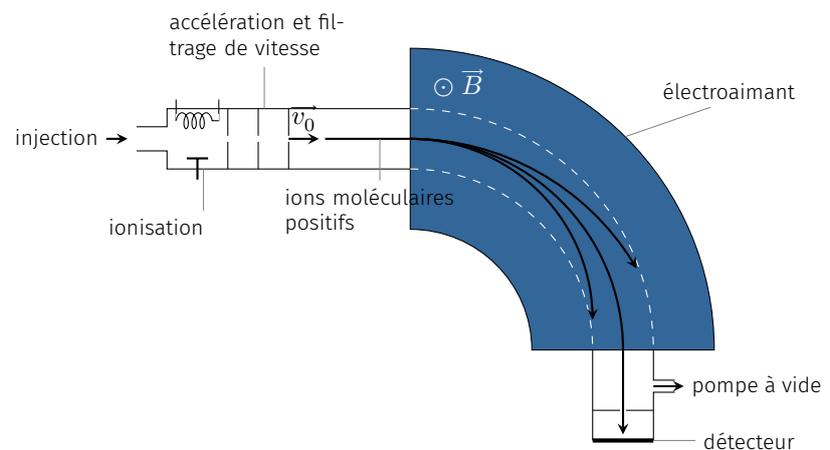


FIG. 5.8 : Principe du spectromètre de masse

L'étendue des applications de cette technologie est assez vaste.

- ▶ En chimie analytique : détermination de la formule brute des molécules;
- ▶ En chimie de l'environnement : analyse de l'air et de l'eau ; suivi de la pollution par des pesticides ou des processus industriels.
- ▶ En biochimie : identification de protéines (séquençage d'acides aminés) et de micro-organismes ; analyse de gaz sanguins ; pharmacologie ; toxicologie.
- ▶ En physique fondamentale : mesure de masse d'atomes stables.
- ▶ En sciences de la Terre : mesure des rapports isotopiques (géologie, océanographie, glaciologie, volcanologie, physique de l'atmosphère, étude des météorites, planétologie, etc.).

5.3 Interaction magnétique avec les courants électriques

Force de Laplace

Considérons un conducteur filiforme parcouru par un courant électrique d'intensité I en présence d'un champ magnétostatique \vec{B} . Admettons que ce conducteur soit en mouvement dans le champ magnétique et analysons les forces qui s'exercent sur une portion orientée $d\vec{\ell}$ de conducteur.

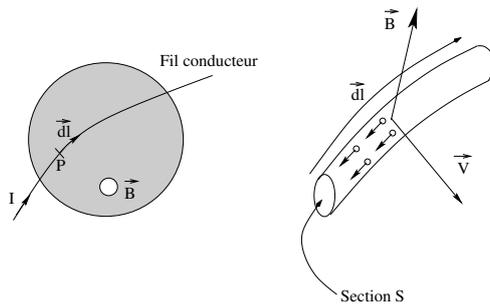


FIG. 5.9 : Notations pour la force de Laplace.

Adoptons les notations suivantes :

- ▶ s est la section droite du fil conducteur ;
- ▶ n_- est le nombre de porteurs de charges mobiles (charges q_-) par unité de volume ;
- ▶ n_+ est le nombre de cations fixes (charges q_+) par unité de volume assurant la neutralité de la matière ;
- ▶ \vec{V} est la vitesse de la portion de conducteur *par rapport au laboratoire* ;
- ▶ \vec{v} est la vitesse moyenne des porteurs de charge libres *par rapport au conducteur*.

L'électroneutralité du conducteur impose

$$n_-q_- + n_+q_+ = 0$$

Intéressons-nous à la force magnétique que ressent une portion de conducteur. Appelons $d\vec{\ell}$ un élément de longueur du conducteur situé en M et orienté par le sens algébrique du courant. Sommons toutes les forces magnétiques de Lorentz subies par toutes les particules chargées :

$$d\vec{F} = n_-sdlq_-(\vec{v} + \vec{V}) \wedge \vec{B} + n_+sdlq_+ \vec{V} \wedge \vec{B} = n_-sdlq_- \vec{v} \wedge \vec{B}$$

On reconnaît dans cette expression le vecteur densité de courant $\vec{j} = q_-n_- \vec{v}$ d'où

$$d\vec{F} = s d\ell \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Dans le cas d'un circuit filiforme, on a $\vec{j}s d\ell = I d\vec{\ell}$. Ainsi

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

La résultante des forces s'écrit alors

$$\vec{F} = \oint_e I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad \heartsuit \quad (5.3)$$

Cette force, dite force de Laplace, représente la force macroscopique que ressent un conducteur dans un champ magnétique.

Si le conducteur n'est pas filiforme, on utilisera la formule plus générale

$$\vec{F} = \iiint \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$

où l'intégration est effectuée sur le volume du conducteur ($d\tau$ représente l'élément de volume).

La force de Laplace possède de nombreuses applications dans le domaine électrotechnique :

- ▶ le moteur électrique continu produit un mouvement rotatif à l'aide d'un courant continu dans un champ magnétique radial;
- ▶ le haut-parleur électrodynamique produit un déplacement alternatif d'une membrane à l'aide d'un courant alternatif transformant ainsi l'énergie électrique en énergie sonore;
- ▶ l'ampèremètre à aiguille relie la mesure d'une intensité électrique à un angle de torsion d'un circuit électrique dans un champ magnétique.

Effet Hall (1879)

On peut se demander comment les porteurs de charge libres réussissent à transmettre la force magnétique à l'ensemble du conducteur. En fait, en présence d'un champ magnétique, ces porteurs de charge sont déviés et tentent de sortir du conducteur. Cependant, les charges fixes du cristal les retiennent au sein du conducteur : c'est par ce processus que la force magnétique est transmise au conducteur.

De surcroît, en s'accumulant sur les parois, les porteurs de charge libres créent un champ électrique dont l'effet compense la force magnétique et assure ainsi un régime permanent (les porteurs de charge se déplacent à une vitesse moyenne constante). Ce champ électrique produit une tension que l'on peut mesurer : c'est l'effet Hall⁴.

4 : Découvert en 1879 par Edwin Herbert Hall.

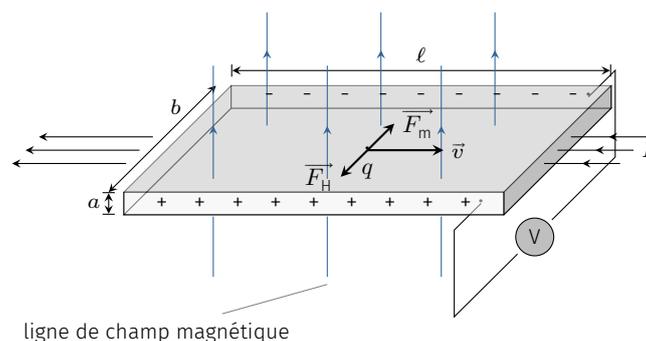


Fig. 5.10 : Effet Hall

Considérons une plaquette conductrice de longueur ℓ , de largeur b et de faible épaisseur a . La plaquette, parcourue par un courant d'intensité I , est placée dans un champ magnétostatique uniforme et perpendiculaire à sa plus grande face. La force magnétique concentre les charges mobiles sur un bord ce qui produit une force électrique s'opposant à la force magnétique. Une situation d'équilibre apparaît très vite quand :

$$q_- \vec{E} + q_- \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0} \implies E = vB$$

Le champ électrique est tel que le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{v})$ est direct. Il règne donc une tension U_H , dite tension de Hall, entre les bords de la plaquette. Cette tension s'obtient en calculant la circulation du champ électrique entre les bords. Le champ électrique étant constant on a tout simplement

$$U_H = E \times b = vBb$$

Or, le courant électrique présente une intensité

$$I = j s = n_- |q_-| v ab$$

D'où

$$U_H = R_H \frac{IB}{a} \quad \text{avec} \quad R_H = \frac{1}{|q_-| n_-} \quad \heartsuit \quad (5.4)$$

où la grandeur R_H désigne la *constante de Hall*. Ainsi, on prévoit que la tension de Hall est proportionnelle au champ magnétique. Cet effet est mis à profit dans les *Teslamètres à effet Hall*⁵. On trouve également des sondes à effet Hall dans les téléphones portables ce qui permet de mesurer l'orientation du champ magnétique terrestre et donc de s'orienter. Par ailleurs, la polarité de la tension de Hall permet d'identifier la nature des porteurs de charge libres.

L'étude de l'effet hall dans des systèmes ultra minces (systèmes 2D) à basse température et en présence d'un fort champ magnétique a mis en évidence l'effet Hall quantique qui valu le prix Nobel de Physique à Klaus von Klitzing en 1985. Evidemment, une description quantique de la conduction est nécessaire pour interpréter ce phénomène.

5 : Pour un champ magnétique de 1T, une intensité électrique de 1A et une épaisseur $a = 100 \mu\text{m}$ on obtient $U_H \approx 1 \mu\text{V}$ dans un métal. Cette tension est donc difficilement mesurable. En revanche, dans un semi-conducteur l'effet est multiplié par 10^6 car la densité des porteurs de charge est beaucoup plus faible ce qui explique leur utilisation dans les tesla-mètres.

Travail des forces de Laplace

Cherchons à calculer le travail des forces de Laplace lors du déplacement d'un circuit alimenté par un courant constant dans un champ indépendant du temps.

Cas d'un cadre rectangulaire – Considérons un cadre ABCD rectangulaire parcouru par un courant d'intensité I se déplaçant dans un champ magnétique uniforme. Pour simplifier nous supposons que le cadre se déplace suivant (AB) et qu'il peut se déformer (son aire peut donc varier). Notons \vec{AA}' le déplacement de la portion AD et \vec{BB}' celui de la portion BC.

Seules les forces qui s'exercent sur AD et BC travaillent. La portion AD

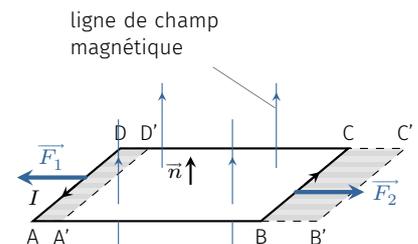


FIG. 5.11 : Circuit électrique rectangulaire en mouvement dans un champ magnétique.

subit une force de Laplace \vec{F}_1 dont le travail s'écrit

$$W_1 = I(\overline{DA} \wedge \vec{B}) \cdot \overline{AA'} = I(\overline{AA'} \wedge \overline{DA}) \cdot \vec{B}$$

Or, le vecteur $\overline{AA'} \wedge \overline{DA}$ a pour norme, l'aire S_1 de la surface balayée et est dirigé perpendiculairement à celle-ci. On a

$$W_1 = -I\vec{B} \cdot \vec{n}S_1$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface du cadre dont le sens est lié au sens positif du courant *via* la règle du tire-bouchon⁶. De la même manière, la force \vec{F}_2 qui s'exerce sur la portion BC produit un travail

$$W_2 = I(\overline{BC} \wedge \vec{B}) \cdot \overline{BB'} = I(\overline{BB'} \wedge \overline{BC}) \cdot \vec{B}$$

Ici, le vecteur $\overline{BB'} \wedge \overline{BC}$ a pour norme l'aire de la surface balayée par la branche BC et un sens identique à \vec{n} . On a donc

$$W_2 = I\vec{B} \cdot \vec{n}S_2$$

Finalement, le travail des forces de Laplace qui s'exerce sur le cadre vaut $W = I\vec{B} \cdot \vec{n}(S_2 - S_1)$. Si l'on note $\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{n}S$ le flux magnétique à travers le cadre, on trouve

$$W = I\Delta\phi_B$$

Le travail est proportionnel à l'intensité du courant et à la variation du flux magnétique.

Généralisation – Le calcul réalisé précédemment se généralise à tout circuit dans un champ magnétique permanent. On retiendra que le travail des forces de Laplace vaut

$$W = I\Delta\phi_B \quad \text{avec} \quad \phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad \heartsuit \quad (5.5)$$

On peut s'étonner de l'apparente contradiction qu'il y a entre le fait que la force de Laplace est d'origine magnétique et qu'elle produit paradoxalement du travail. En réalité, le travail des forces magnétiques qui s'exercent sur les charges (libres et fixes) est bien nul. En effet

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum (q_i \vec{v}_i \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_i dt = \vec{0}$$

Cependant, ce que l'on a calculé représente le travail macroscopique des forces magnétiques et s'écrit

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \sum (q_i \vec{v}_i \wedge \vec{B}) \cdot \vec{V} dt$$

où \vec{V} est la vitesse de déplacement du conducteur (et non des charges). Ce travail non nul est en fait compensé par un travail microscopique dit travail électromoteur.

Énergie d'interaction d'un circuit dans un champ magnétique – Selon (5.5), le travail des forces de Laplace ne dépend que de l'état initial et final quel que soit le chemin suivi entre ces deux états. On peut donc définir l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p^{\text{mag}}$:

$$W = -\Delta\mathcal{E}_p^{\text{mag}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -I\phi_B \quad \heartsuit \quad (5.6)$$

Règle du flux maximum – Ainsi, un circuit électrique en présence d'un champ magnétique cherchera à minimiser son énergie potentielle magnétique c'est-à-dire à maximiser son flux magnétique : c'est la règle du flux maximum. Pour illustrer cette propriété, imaginons une spire alimentée par un courant d'intensité I et suspendue par deux fils électriques rigides. Approchons le pôle sud d'un aimant. Imaginons que l'orientation du courant soit telle que le flux est positif. Pour maximiser le flux magnétique, la spire doit se rapprocher de l'aimant, là où le champ magnétique est le plus fort : la spire est alors attirée vers l'aimant. Invertissons maintenant le sens du courant. Le flux magnétique est négatif et chercher à le maximiser revient à s'éloigner

de l'aimant : la spire est repoussée par l'aimant.

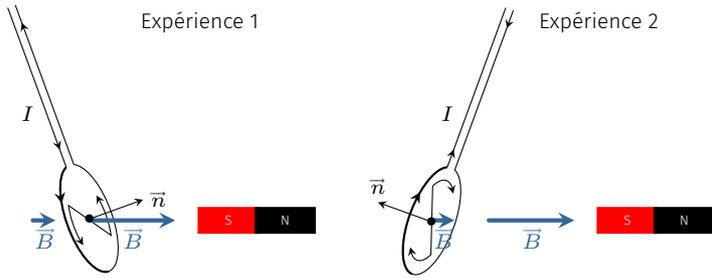


FIG. 5.12 : Illustration de la règle du flux maximum.

Finalement, ces expériences montrent qu'une spire se comporte comme un aimant dont la polarité dépend du sens du courant. Le vecteur \vec{n} indique l'axe sud-nord de l'aimant équivalent.

Dipôle magnétique dans un champ magnétique

Comme on vient de le voir, une boucle de courant se comporte comme un aimant. On peut donc lui associer un pôle sud et un pôle nord. Pour caractériser cette polarité, on définit un vecteur orienté du sud vers le nord dit *moment magnétique* et noté \vec{m} .

Pour une spire plane quelconque, le moment magnétique s'écrit

$$\vec{m} = IS\vec{n} \quad \heartsuit \quad (5.7)$$

où S est l'aire de la surface de la spire et \vec{n} un vecteur unitaire perpendiculaire à la spire et dont l'orientation est associée au sens positif du courant par la règle du tire-bouchon. m s'exprime en $A.m^2$.

Action d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique – Plaçons un dipôle magnétique dans un champ magnétique permanent. Si le dipôle est de petite taille, on peut considérer que le champ magnétique est localement uniforme. Ainsi l'énergie potentielle magnétique s'écrit

$$\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -I\phi_B = -I\vec{B} \cdot \vec{n}S = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad \heartsuit \quad (5.8)$$

Le dipôle ressent une résultante des forces magnétiques (qui correspond à la force de Laplace)

$$\vec{F} = -\text{grad}\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

Par conséquent, si le champ magnétique est partout le même, la quantité $\vec{m} \cdot \vec{B}$ ne dépend pas de l'espace et la force magnétique est donc nulle⁷. En revanche, en vertu de la règle du flux maximum,

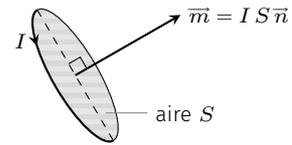
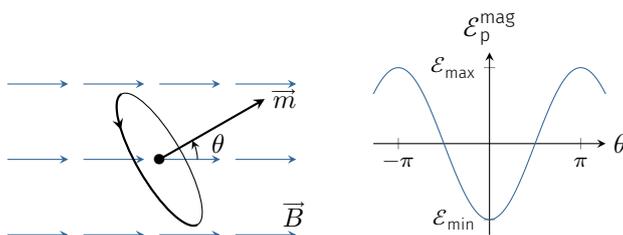


FIG. 5.13 : Moment dipolaire magnétique

De manière plus générale, toute distribution de courant localisée dans l'espace est caractérisée par un moment dipolaire magnétique. Pour une boucle filiforme quelconque (pas forcément plane), le moment magnétique s'écrit

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{OP} \wedge I d\vec{\ell}$$

Avec P un point parcourant la boucle.

⁷ : On peut retrouver ce résultat à partir de l'expression de la force de Laplace puisque si le champ magnétique est uniforme, la force de Laplace donne

$$\vec{F} = I\vec{L} \wedge \vec{B}$$

avec \vec{L} le vecteur qui joint les extrémités de la portion de circuit qui plonge dans le champ magnétique. Pour une boucle de courant, $\vec{L} = \vec{0}$, donc $\vec{F} = \vec{0}$.
FIG. 5.14 : Dipôle rigide dans un champ uniforme.

le dipôle va chercher à s'orienter de façon à maximiser son flux magnétique. Appelons θ l'angle entre le moment dipolaire magnétique et le champ magnétique. L'énergie magnétique vaut

$$\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -mB \cos \theta$$

On constate alors qu'il existe une position d'équilibre stable lorsque le moment magnétique est aligné avec le champ magnétique extérieur. Autrement dit, les forces magnétiques présentent un couple d'orientation dont on peut exprimer le moment $\vec{\Gamma}$. En effet, supposons le dipôle magnétique animé d'un mouvement de translation (vitesse \vec{V}) et d'un mouvement de rotation (vecteur rotation $\vec{\Omega}$). Pendant dt , le travail des forces magnétiques s'écrit

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{V} dt + \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} dt = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} dt \quad (5.9)$$

puisque la résultante des forces est nulle. Par ailleurs, le travail produit est relié à la variation d'énergie magnétique via

$$dW = -d\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = d(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

Or, le dipôle étant considéré rigide, le moment magnétique conserve la même norme et seule son sens varie. La formule de dérivation vectorielle (cf. cours de mécanique sur le vecteur rotation) donne $d\vec{m}/dt = \vec{\Omega} \wedge \vec{m}$ ce qui permet d'écrire

$$dW = d(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{\Omega} \wedge \vec{m}) \cdot \vec{B} dt = (\vec{m} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{\Omega} dt$$

En comparant avec la formule (5.9), on obtient :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad \heartsuit \quad (5.10)$$

On retrouve le fait que lorsque le dipôle est aligné avec le champ magnétique, le couple s'annule : le dipôle est en équilibre mécanique.

Analogies

Ces formules sont analogues à celle rencontrées dans l'étude de l'interaction d'un dipôle électrique avec un champ électrique.

grandeurs	électriques	magnétiques
moment dipolaire	\vec{p}	\vec{m}
champ extérieur	\vec{E}	\vec{B}
énergie d'interaction	$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	$\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$
couple d'orientation	$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$	$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$

CHAMP B CRÉÉ PAR DES COURANTS

6

La loi de Biot et Savart permet de relier le courant électrique aux effets magnétiques qu'il produit dans l'hypothèse où ce courant est stationnaire. Cette loi permet, d'une part de dégager les propriétés de symétrie du champ magnétostatique et d'autre part de le calculer analytiquement dans certains cas simples comme le fil infini et la spire. Enfin, le champ créé par un dipôle magnétique est traité ce qui permet d'aborder la question de l'origine du magnétisme des aimants.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/biot-et-savart.php>

6.1 Loi de Biot et Savart . . .	55
Quelques faits historiques	55
Énoncé	56
Illustration sur un exemple	57
Topographies - Symétries	57
6.2 Champ dipolaire	60
Champ d'une spire	60
Approximation dipolaire .	61
Origines du magnétisme .	62

6.1 Loi de Biot et Savart

Quelques faits historiques

1820 : expérience d'Ørsted – Lors d'un cours, le danois Hans Christian Ørsted découvre qu'un fil conducteur parcouru par un courant électrique¹ fait dévier l'aiguille d'une boussole placée à proximité.

Cette expérience prouve sans ambiguïté le lien entre courant électrique et champ magnétique. Par ailleurs, si on inverse le sens du courant, l'aiguille tourne de 180°. L'expérience d'Ørsted suscite un grand intérêt car c'est la première fois qu'on met en évidence une force qui n'est pas suivant la ligne joignant les deux corps en interaction.

1820 : les travaux d'Ampère et d'Arago – C'est François Arago qui, après avoir assisté à une démonstration de l'expérience d'Ørsted à Genève, la présente à l'Académie des sciences de Paris. Dans l'assemblée, Ampère* est enthousiaste et se lance dans un travail expérimentale et théorique. Ampère montre notamment que deux fils rectilignes parcourus par un courant s'attirent ou se repoussent selon que les courants sont dans le même sens ou pas. Il montre également qu'une spire parcourue par un courant se comporte comme un aimant. On peut associer à une spire un pôle nord et un pôle sud. Si l'on change le sens du courant, la polarité change.

1 : À l'époque, la pile de Volta est déjà inventée.

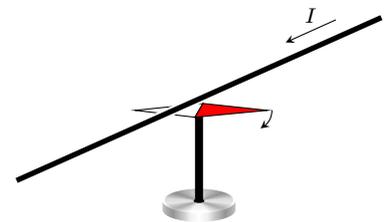


FIG. 6.1 : Expérience d'Ørsted.

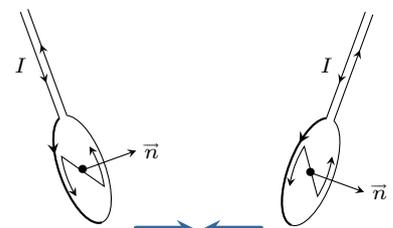


FIG. 6.2 : Expériences d'Ampère.

* **André-Marie Ampère (1775 - 1836)** : physicien et chimiste français, considéré comme le « Newton de l'électricité ». Né à Polémieux-au-Mont-d'Or, près de Lyon, fils d'un juge de paix lyonnais guillotiné sous la Révolution, André-Marie Ampère mène une brillante carrière scientifique : titulaire de la chaire de mécanique à l'École Polytechnique en 1809, il est élu à l'Académie des Sciences en 1814, puis à la chaire de physique du Collège de France en 1824. Il publie en 1827 son dernier grand ouvrage *Sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience*. Il termine sa vie en tant qu'inspecteur général de l'instruction publique et laissera son nom à l'unité de courant électrique, l'ampère.

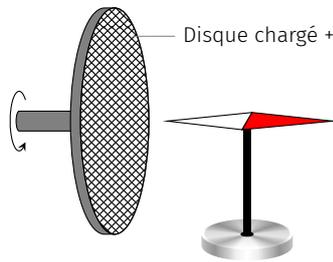


FIG. 6.3 : Expérience de Rowland

Par ailleurs, Arago qui collabore avec Ampère découvre que le courant électrique a la propriété d'aimanter le fer ce qui mènera à l'invention de l'électroaimant.

1876 : expérience de Rowland – Henry Rowland démontre, à l'aide d'un travail expérimental très soigné, qu'un disque chargé électriquement en rotation rapide produit un champ magnétique. Autrement dit, les charges électriques en déplacement produisent les mêmes effets magnétiques qu'un courant électrique ce qui suggère que le courant électrique est lié à un déplacement de charges électriques.

Conclusion

Tout mouvement de charges, et notamment le courant électrique, est source de champ magnétique.

Énoncé

L'étude quantitative des interactions entre aimants et courants fut réalisée par les physiciens Biot et Savart (1820). Ils mesurèrent la durée des oscillations d'une aiguille aimantée en fonction de sa distance à un courant rectiligne. Ils trouvèrent que la force agissant sur un pôle est dirigée perpendiculairement à la direction reliant ce pôle au conducteur et qu'elle varie en raison inverse de la distance. De ces expériences, Laplace déduisit ce qu'on appelle aujourd'hui la loi de Biot et Savart.

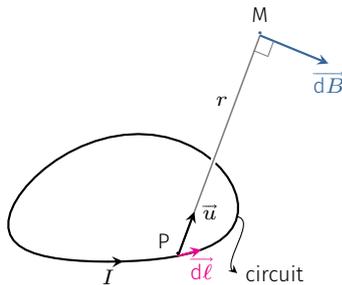


FIG. 6.4 : Notations utilisées dans la loi de Biot et Savart.

Le champ magnétique que produit une distribution filiforme de courant peut s'obtenir en décomposant la distribution en petits éléments de courant. On considère que chaque élément de courant de longueur orientée $\vec{d\ell}$ traversé par un courant d'intensité I produit un champ magnétique élémentaire en M :

$$\vec{dB}(M) = K \frac{I \vec{d\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

où K est une constante, \vec{u} le vecteur unitaire joignant l'élément de courant à M , et r la distance entre M et la portion de circuit. Il faut voir \vec{dB} comme un intermédiaire de calcul, seule la somme de toutes les contributions a un sens physique. Le champ magnétique résultant s'obtient donc en intégrant l'expression précédente, le point P parcourant tout le circuit :

$$\vec{B}(M) = \oint \vec{dB} = K \oint_{\text{circuit}} \frac{I \vec{d\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

le symbole \oint signifiant que l'intégration s'effectue le long du circuit fermé.

Loi de Biot et Savart

Dans le Système international d'unités, on pose

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad \text{avec} \quad \mu_0 \simeq 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$$

μ_0 est appelé *perméabilité magnétique du vide*. Ainsi, un circuit filiforme alimenté par un courant stationnaire d'intensité I produit un champ magnétique en M donné par

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \overline{PM}}{PM^3}$$

La loi de Biot et Savart permet de calculer le champ magnétique créé par une distribution de courant stationnaire filiforme. Cela conduit au calcul de trois intégrales scalaires voire moins lorsque le problème présente suffisamment de symétries.

Il peut arriver que le calcul analytique s'avère ardu, il faut alors envisager une approche numérique.

Exemple de calcul : le fil rectiligne infini

Considérons un fil infini d'axe Oz , parcouru par un courant constant d'intensité I et cherchons le champ magnétique produit à la distance r du fil. À l'aide de la formule de Biot et Savart, on peut exprimer le champ magnétique dB produit par la portion de longueur $d\ell$:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \cos \varphi}{PM^2}$$

avec φ l'angle que fait la droite (MP) avec le plan médiateur passant par M. Choisissons la variable φ comme variable d'intégration. Sachant que $PM = r / \cos \varphi$ et $\ell = r \tan \varphi$ (d'où l'on tire $d\ell = r \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$) on obtient

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \varphi}{r} d\varphi$$

Vu que tous les champs élémentaires sont colinéaires et dirigés suivant le vecteur orthoradial \vec{u}_θ , on peut ajouter les intensités des champs pour avoir le champ magnétique total

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

Finalement, il règne dans l'espace un champ magnétique

$$\vec{B}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{u}_\theta \quad (6.1)$$

Topographies - Symétries

Décrivons différentes situations afin de dégager les propriétés essentielles du champ magnétique.

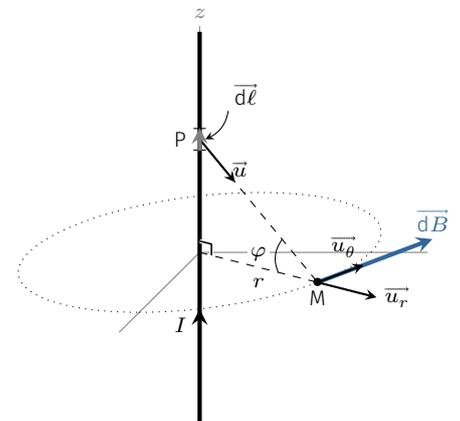


FIG. 6.5 : Champ magnétique créé par un fil rectiligne infini.

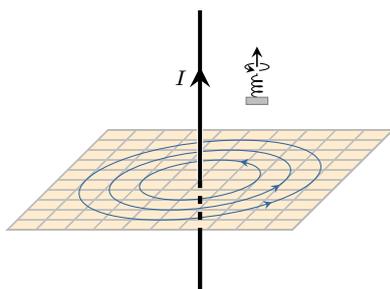


FIG. 6.6 : Champ magnétique créé par un fil infini.

Le fil infini – Comme on vient de le voir sur l'exemple précédent, le champ magnétique créé par un long fil rectiligne est *orthoradial*. Par conséquent, les lignes de champ sont des cercles. Contrairement au champ électrique, les lignes de champ magnétique se referment sur elle-même. On peut noter que le champ magnétique tourne autour du fil dans un sens imposé par la règle du tire-bouchon : **un tire bouchon tournant dans le sens du champ magnétique progresse dans le sens du courant.**

La spire circulaire – La FIG. 6.7 présente les lignes de champ magnétique que produit une spire circulaire alimentée par un courant électrique permanent. Ces lignes de champ sont dans des plans perpendiculaires à la spire et contenant son centre. On peut noter, là encore, la structure fermée de ces lignes. Comme on l'a déjà vu précédemment, on peut associer à cette spire un moment magnétique qui indique la direction sud-nord de l'aimant équivalent. Cela correspond également au sens du champ magnétique qui règne au centre de la spire.

Le solénoïde – Enroulons de façon jointive un fil conducteur sur un cylindre de longueur L : on obtient une bobine ou solénoïde. Cet enroulement est caractérisé par une densité linéique d'enroulement $n = N/L$, avec N le nombre d'enroulements. Bien que cet enroulement soit légèrement hélicoïdal, on peut, dans une première approximation, assimiler le solénoïde à une superposition de spires très rapprochées. Dans ce cas, les lignes de champ sont des courbes planes situées dans un plan coupant en deux le solénoïde dans le sens de la longueur. La FIG. 6.7 montre l'allure des lignes de champ. À l'intérieur de la bobine, les lignes sont quasiment parallèles ce qui traduit le caractère quasi-uniforme du champ. On montre que lorsque $L \rightarrow \infty$, le champ magnétique à l'intérieur est axial, uniforme et ne dépend que de l'intensité électrique et de la densité d'enroulement : $B_{int} = \mu_0 n I$.

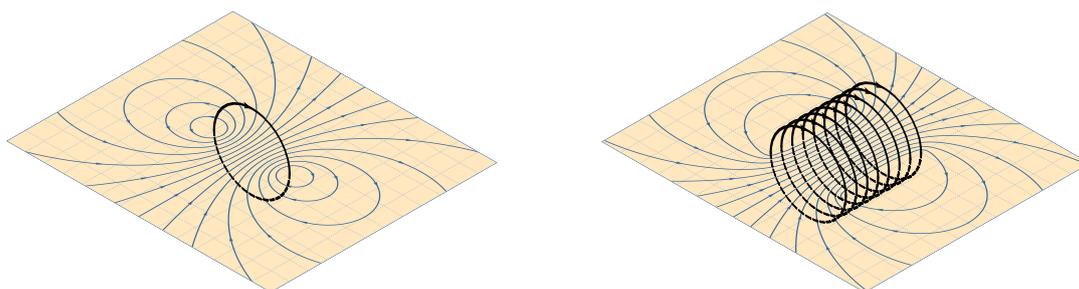


FIG. 6.7 : Cartes de champ d'une spire (à gauche) et d'un solénoïde (à droite).

À retenir

Pour un enroulement de spires, un tire-bouchon que l'on fait tourner dans le sens du courant électrique progresse dans le sens du champ magnétique au centre et correspond au sens sud-nord de l'aimant équivalent.

Symétries – Le champ magnétique ne présente pas les mêmes pro-

propriétés de symétrie que le champ électrique. En effet, la formule de Biot et Savart montre que le champ magnétique se transforme comme un produit vectoriel. On dit que le champ magnétique est un *vecteur axial* ou *pseudovecteur*.

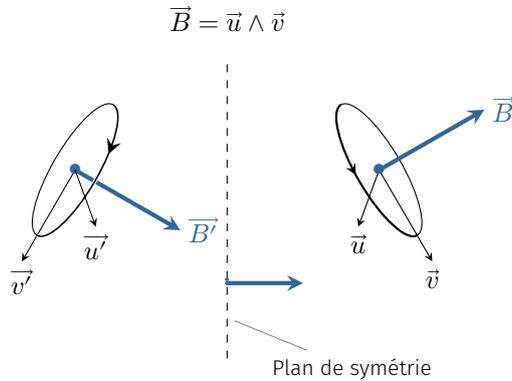


FIG. 6.8 : Transformation d'un vecteur axial par un plan de symétrie.

En présence d'un plan de symétrie, un vecteur normal² se transforme comme dans un miroir. En conséquence, le produit vectoriel de deux vecteurs normaux ne se transforme pas comme dans un miroir. Sur la FIG. 6.8, on voit que \vec{B} se transforme ainsi :

2 : On dit également vecteur polaire.

$$M \xrightarrow{\text{symétrie}} M' \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) \xrightarrow{\text{symétrie}} -\text{sym}\vec{B}(M)$$

En vertu du principe de Curie, si la distribution de courant est invariante par symétrie, l'opération de la symétrie ne doit pas changer la valeur du champ magnétique. Par conséquent

$$\vec{B}(M') = -\text{sym}\vec{B}(M) \quad \heartsuit \quad (6.2)$$

Cette propriété implique que **pour tout point M situé dans un plan de symétrie, le champ magnétique est obligatoirement perpendiculaire au plan de symétrie.**

On dit que la distribution présente un plan d'anti-symétrie \mathcal{P}' lorsque la distribution de courant est invariante par l'opération de symétrie de plan \mathcal{P}' suivi de l'inversion du sens des courants. Dans ce cas, en un point M de l'espace, le champ magnétique ne doit pas varier lorsque l'on effectue cette transformation (principe de Curie). Détaillons la transformation

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\text{symétrie}} & M' & \xrightarrow{\text{inversion}} & M' \\ \vec{B}(M) & \xrightarrow{\text{symétrie}} & -\text{sym}\vec{B}(M) & \xrightarrow{\text{inversion}} & \text{sym}\vec{B}(M) \end{array}$$

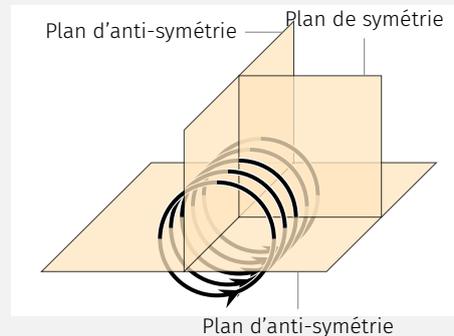
On en déduit que

$$\vec{B}(M') = \text{sym}\vec{B}(M) \quad \heartsuit \quad (6.3)$$

Cette propriété implique que **pour tout point M situé dans un plan d'anti-symétrie, le champ magnétique est obligatoirement contenu dans ce plan.**

Exemple

Identifions les plans de symétrie et d'anti-symétrie d'un solénoïde cylindrique (considéré comme un ensemble de spires parallèles).



Tout plan contenant l'axe du solénoïde est un plan d'anti-symétrie. Les lignes de champ doivent donc appartenir à ces plans. En conséquence, l'axe du solénoïde est nécessairement une ligne de champ. Par ailleurs, le plan perpendiculaire à l'axe du solénoïde et passant par le milieu du solénoïde est un plan de symétrie. Les lignes de champ doivent traverser ce plan à angle droit.

6.2 Champ créé par un dipôle magnétique

On cherche à déterminer l'expression du champ magnétique créé par un dipôle magnétique c'est-à-dire une distribution localisée de courant auquel on peut associer un moment magnétique \vec{m} . Nous verrons que loin du dipôle magnétique la structure du champ magnétique présente des analogies avec celui du champ électrique créé par un dipôle électrique.

Champ magnétique créé le long de l'axe d'une spire

Commençons par étudier le champ magnétique produit par une spire circulaire de rayon R parcouru par un courant permanent d'intensité I . Dans le cas général, le calcul fait appel aux intégrales elliptiques; on se contente ici d'étudier l'évolution du champ magnétique le long de l'axe (Oz) de la spire.

Tout d'abord, appelons θ le demi-angle au sommet du cône formé par la spire et un point M de l'axe. D'après la loi de Biot et Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

le champ $\vec{dB}(M)$, fait un angle $\pi/2 - \theta$ avec l'axe (Oz).

Par ailleurs, tout plan contenant l'axe de la spire est un plan d'anti-symétrie (il y en a une infinité). Il en résulte que le champ magnétique

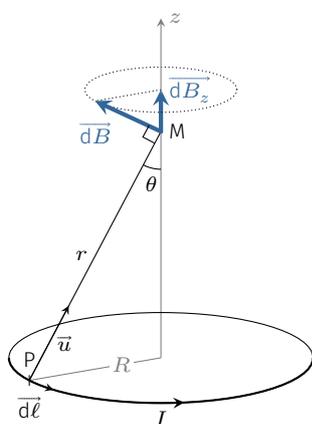


FIG. 6.9 : Calcul du champ magnétique produit sur l'axe d'une spire.

est nécessairement le long de l'axe pour les points M de cet axe. Il suffit dès lors de sommer toutes les composantes verticales des champs élémentaires :

$$dB_z = dB \cos(\pi/2 - \theta) \quad \text{avec} \quad dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \quad \text{soit} \quad dB_z = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2}$$

Lorsque le point P décrit le circuit fermé, l'angle θ , la distance r et l'intensité I restent constants :

$$B_z = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I R \sin \theta}{2r^2}$$

Finalement, compte tenu du fait que $\sin \theta = R/r$, le champ magnétique créé par une spire le long de son axe s'écrit

$$\vec{B}(M) = B_{\max} \sin^3 \theta \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad B_{\max} = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \heartsuit \quad (6.4)$$

B_{\max} représente le champ créé au centre de la spire.

Approximation dipolaire

À partir du résultat précédent, regardons maintenant comment le champ magnétique varie loin de la boucle de courant. Sachant que $\sin \theta = R/\sqrt{R^2 + z^2}$, on peut écrire le résultat précédent en fonction uniquement de la variable z :

$$B(M \in Oz) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Faisons intervenir le moment dipolaire de la spire, $m = \pi R^2 I$:

$$B(M \in Oz) = \frac{\mu_0 m}{2\pi} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Expression qui, loin de la spire, devient ($R^2 + z^2 \simeq z^2$)

$$B(M \in Oz) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{z^3} \quad \text{si} \quad z \gg R$$

Le champ magnétique décroît donc comme l'inverse du cube de la distance lorsque l'on se situe loin de la spire. Cette formule n'est pas sans rappeler l'évolution du champ électrique créé par un dipôle électrique le long de l'axe du dipôle. En effet, le champ créé par un dipôle électrique le long de son axe vaut, dans l'approximation dipolaire,

$$E_{\text{dipolaire}}(M \in Oz) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{z^3}$$

On retrouve l'analogie déjà rencontrée au chapitre précédent :

$$\left[\begin{array}{l} \vec{m} \leftrightarrow \vec{p} \\ \vec{B} \leftrightarrow \vec{E} \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \end{array} \right]$$

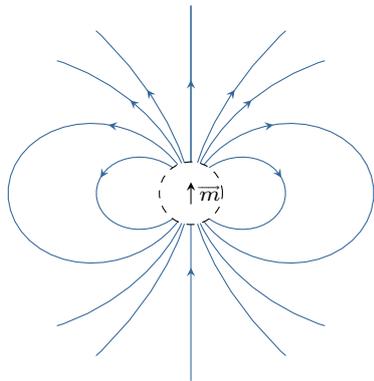


FIG. 6.10 : Lignes de champ magnétique produit par un dipôle magnétique dans l'approximation dipolaire.

On peut montrer que cette analogie fonctionne dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire dès que l'on se trouve loin du dipôle magnétique.

Approximation dipolaire

Le champ magnétique créé par un dipôle magnétique a la même structure que le champ électrique créé par un dipôle dès lors que l'on se place dans l'approximation dipolaire. On a

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m}]$$

Origines du magnétisme

Géomagnétisme – La Terre produit un champ magnétique de l'ordre de $10 \mu\text{T}$. Ce champ est de nature dipolaire et peut s'interpréter comme lié à l'existence d'un dipôle magnétique au centre de la Terre de moment magnétique $m \approx 10^{23} \text{ A}\cdot\text{m}^2$ et dont l'axe est quasi-aligné avec l'axe des pôles. Le dipôle pointe vers le Sud géographique de telle sorte qu'une boussole à la surface de la Terre indiquera le Nord Géographique. Autrement dit, le Nord géographique est un pôle sud magnétique.

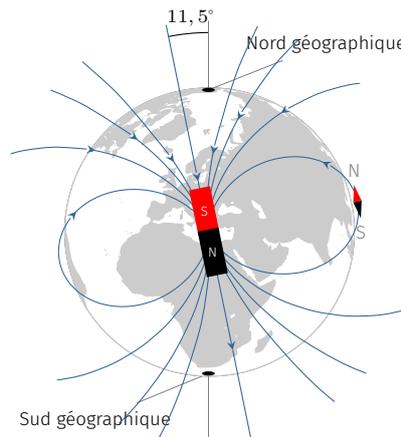


FIG. 6.11 : Champ magnétique terrestre

En réalité, l'axe nord-sud magnétique n'est pas confondu avec l'axe Sud-Nord géographique. Il est incliné de $11,5^\circ$ et subit quelques fluctuations journalières. Ce fait reste encore énigmatique pour les théoriciens. Il est des astres où la configuration est encore plus exotique : par exemple, sur Neptune l'axe fait 90° avec l'axe de rotation !

L'étude de l'évolution du magnétisme terrestre (paléomagnétisme) soulève encore quelques énigmes. Par exemple l'inversion du champ magnétique terrestre ne se produit pas régulièrement (la dernière remonte à 800 000 ans) alors que le champ magnétique solaire s'inverse lui à une cadence régulière ; tous les 11 ans.

Le magnétisme des aimants – C'est Ampère qui, le premier, pressentit que le magnétisme des aimants tenait son origine dans l'existence de minuscules boucles de courants au sein des molécules de la matière. Il a fallu attendre les découvertes du XX^e siècle sur l'atome pour confirmer l'intuition d'Ampère. En effet, de nos jours, on sait que certains atomes (ou molécules) possèdent un moment dipolaire magnétique du fait de leur structure électronique. Dans un matériau non aimanté, les moments dipolaires sont orientés de façon aléatoires de sorte que les effets s'annihilent. C'est la situation que l'on rencontre quand le matériau est non aimanté ou trop chaud, l'agitation thermique étant alors responsable de ce désordre.

En revanche, dans un aimant, les moments microscopiques tendent à s'aligner grâce à une interaction d'origine quantique (on parle de couplage ferromagnétique) et parce que l'agitation thermique n'est pas trop importante. Dans ce cas, l'aimant présente un moment magnétique macroscopique suffisamment important pour créer un fort champ magnétique. Bien entendu, lorsqu'on chauffe l'aimant au delà

d'une certaine température (dite température critique), l'ordre ferromagnétique est rompu et l'aimant perd son aimantation.

Cette description permet de comprendre une expérience qui remonte au XIII^e siècle : l'expérience de l'aimant brisée. Si l'on coupe un aimant en deux, on se retrouve avec deux nouveaux aimants possédant chacun un pôle nord et un pôle sud. Autrement dit, il est impossible d'isoler un seul pôle magnétique.

Relation entre structure électronique et magnétisme

Le magnétisme des atomes est essentiellement dû au mouvement électronique. En effet, imaginons un électron de masse m_e décrivant une orbite circulaire de rayon r à la vitesse v autour du noyau avec lequel il est en interaction. On peut considérer qu'il s'agit d'une boucle de courant de rayon r et de courant $I = e/T$ où T représente la période orbitale du mouvement. Sachant que $T = 2\pi r/v$, le moment magnétique de cette « boucle de courant » vaut donc

$$m = \pi r^2 I = \pi r^2 \frac{ev}{2\pi r} = \frac{evr}{2}$$

L'électron ainsi en mouvement présente également un moment cinétique orbital $L_O = m_e vr$ de sorte qu'il y a proportionnalité entre le moment magnétique et le moment orbital.

$$m = \gamma_0 L \quad \text{avec} \quad \gamma_0 = \frac{e}{2m_e} \quad (6.5)$$

Le facteur γ_0 porte le nom de facteur gyromagnétique. On peut montrer que tout modèle classique conduit à ce résultat quel que soit le mouvement de l'électron. Le noyau présente également un moment magnétique mais sa masse étant plus de mille fois supérieure à celle de l'électron, le facteur gyromagnétique nucléaire est négligeable devant celui de l'électron de sorte que le moment magnétique de l'atome est essentiellement dû au mouvement des électrons.

La description classique que l'on vient de voir n'est hélas pas en accord avec l'expérience et seule une description quantique parvient à appréhender complètement les phénomènes magnétiques. Par exemple, on s'est rendu compte que l'électron possédait un moment cinétique propre dit **moment cinétique de spin** L_s . Pour prendre une image classique, l'électron est comme une petite boule chargée en rotation sur elle-même et possède donc également un moment magnétique lié à son spin. Là s'arrête l'analogie classique, car la relation entre le moment magnétique et le moment cinétique de spin ne vérifie pas l'équation (6.5). On obtient plutôt

$$m_s = g\gamma_0 L_s \quad \text{avec} \quad g \simeq 2 \quad (6.6)$$

avec g un paramètre sans dimension, appelé facteur de Landé, dont la valeur expérimentale est en accord avec les calculs d'électrodynamique quantique.

Finalement, on retiendra que les propriétés magnétiques de l'atome sont essentiellement gouvernées par la façon dont les moments cinétiques orbitaux et de spin des électrons se composent.

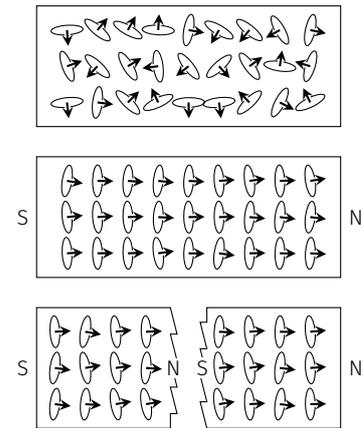


FIG. 6.12 : Origine du magnétisme des aimants - Expérience de l'aimant brisée.

2^EPARTIE – ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

PROPRIÉTÉS LOCALES DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

7

Comme on l'a vu, une distribution statique de charges produit en tout point M un champ électrostatique donné par la loi

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i$$

Expression qui est le résultat de la loi de Coulomb et du principe de superposition. De manière équivalente on peut relier le champ électrostatique avec les sources du champ à l'aide de relations mathématiques *locales*. C'est l'objet de ce chapitre.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/proprietes-locales-E.php>

7.1 Théorème de Gauss

Dans le Chapitre 4 sur les conducteurs, nous avons admis le théorème de Gauss qui stipule que le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque est égal à la quantité de charge électrique située à l'intérieur de la surface :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Revenons un instant sur l'origine de ce théorème et voyons comment cette propriété peut s'exprimer sous forme locale.

Flux du champ électrostatique

Pour démontrer le théorème de Gauss dans sa version intégrale, commençons par placer une charge électrique q en O. Celle-ci est responsable d'un champ électrique radial qui décroît comme l'inverse du carré de la distance :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad r = OM$$

Les lignes de champ sont alors des demi-droites partant de O.

Imaginons maintenant une surface fermée S s'appuyant sur des lignes de champ et limitée par deux sections sphériques S_1 et S_2 . Par construction, le flux du champ électrostatique à travers S se résume au flux à travers S_1 et S_2 . Pour tout point situé sur la section sphérique S_1 le

7.1 Théorème de Gauss . . .	67
Flux de E	67
Application	69
Théorème de la divergence	70
Équation de Maxwell-Gauss	72
Relation de passage	73
7.2 Circulation du champ . .	74
Champ conservatif	74
Théorème de Stokes	75
Éq. de Maxwell-Faraday . . .	77
Continuité de E_t	77
7.3 Potentiel électrique . . .	78
Définition	78
Équation de Poisson	79
Théorème d'unicité	81
Théorème de la moyenne . . .	83
7.4 Énergie électrostatique .	84
Rappels	84
Densité d'énergie	85
Discussion	86

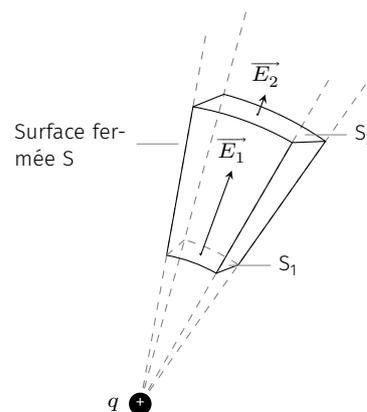


FIG. 7.1 : Le flux du champ électrique à travers S est nul ici.

Rappelons que \vec{n} est orthogonal à la surface et orienté vers l'extérieur.

1 : Vous pourrez vérifier que le résultat final ne dépend pas de cette hypothèse.

champ électrostatique est constant (en norme) et colinéaire à \vec{n} de sorte que

$$\iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n} dS = -E_1 S_1$$

où le signe $-$ apparaît si l'on suppose la charge positive¹. De la même manière, le flux à travers la section sphérique S_2 s'écrit

$$\iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n} dS = E_2 S_2$$

Or, à mesure que l'on s'éloigne de la charge, le champ électrostatique décroît en $1/r^2$, tandis que l'aire de la section sphérique augmente en r^2 de sorte que $E_1 S_1 = E_2 S_2$. Il en résulte que

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E_2 S_2 - E_1 S_1 = 0$$

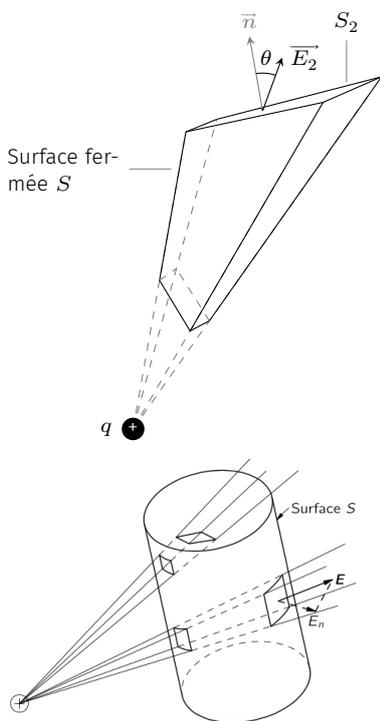


FIG. 7.3 : Tout volume peut être décomposé en un ensemble de troncs coniques infinitésimaux de sorte que le flux total à travers la surface fermée qui délimite ce volume est nul si la charge électrique est à l'extérieur.

Imaginons maintenant que les sections sphériques soient assez petites pour être assimilables à des plans, puis inclinons-les. Le résultat précédent change-t-il ? Ici encore le flux ne dépend que du flux à travers S_1 et S_2 . Concentrons-nous sur la surface S_2 . En l'inclinant d'un angle θ par rapport à la situation précédente, on augmente son aire d'un facteur $1/\cos \theta$. Dans le même temps le produit scalaire $\vec{E}_2 \cdot \vec{n}$ diminue d'un facteur $\cos \theta$. C'est pourquoi, $\vec{E}_2 \cdot \vec{n} S_2$ reste inchangé et le flux total à travers S est toujours nul si la charge est à l'extérieur.

Munis de ce résultat, on peut facilement se convaincre que le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle à travers une surface fermée est nul lorsque la charge ne s'y trouve pas enfermée. En effet, sélectionnons un faisceau conique de lignes de champ faiblement divergent : soit il ne traverse pas la surface fermée, soit il la traverse en découpant un volume comme étudié précédemment. Dans tous les cas, le flux produit est nul. En additionnant toutes les contributions on aboutit au résultat :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \text{si la charge est à l'extérieur de } S$$

Que se passe-t-il maintenant si la charge est placée à l'intérieur d'une surface fermée S ? Pour trouver la réponse faisons intervenir une sphère S' située à l'intérieur de S et centrée sur la charge. Notez que l'on peut toujours trouver une telle sphère. Appelons S'' la réunion

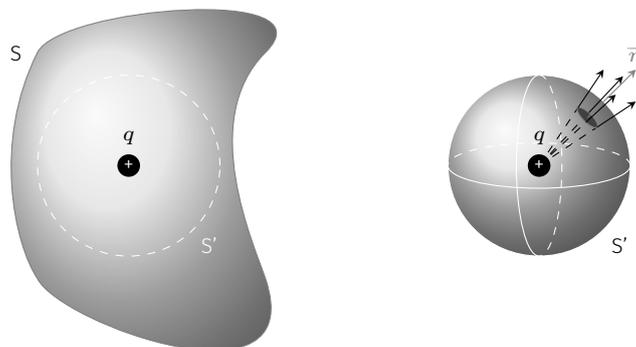


FIG. 7.4 : Le flux du champ électrique à travers S est le même que celui à travers S' .

des deux surfaces, puis notons ϕ , ϕ' et ϕ'' les flux du champ élec-

trostatique à travers les surfaces S , S' et S'' . Puisque \vec{n} est orienté vers l'extérieur de la surface fermée, on a la relation $\phi'' = \phi - \phi'$. Or, S'' délimite un volume qui *ne contient pas* la charge électrique. Par conséquent

$$\phi'' = 0 \quad \text{et} \quad \phi = \phi'$$

Il suffit de calculer le flux à travers la sphère S' pour déterminer le flux à travers une surface fermée quelconque. En outre ce calcul est très simple puisque $\vec{E} \cdot \vec{n} = E$ avec E constant et égal à $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ en tout point de la sphère. On trouve donc

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iint_{S'} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

En résumé,

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \begin{cases} 0, & \text{si la charge est à l'extérieur de } S \\ \frac{q}{\epsilon_0} & \text{si la charge est à l'intérieur de } S \end{cases}$$

Ce résultat se généralise facilement avec N charges ponctuelles. En effet, en vertu du principe de superposition, le champ électrostatique produit par une distribution $\{q_{i=1,\dots,N}\}$ s'écrit

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N$$

dont le flux vaut

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \sum_i \iint_S \vec{E}_i \cdot \vec{n} dS = \frac{\text{somme des charges enfermées par } S}{\epsilon_0}$$

Ce résultat important constitue le théorème de Gauss sous sa forme intégrale :

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \heartsuit \quad (7.1)$$

Attardons-nous un instant sur la beauté de ce théorème. Ce qu'il dit est assez surprenant : le flux du champ électrique à travers une surface fermée dépend seulement de la quantité de charge qui s'y trouve. Autrement dit, une fois la surface fermée choisie, on peut toujours déplacer les charges extérieures; le champ électrique changera partout et notamment en chaque point de la surface fermée, mais le flux à travers celle-ci restera inchangé! Avouez que c'est contraire à l'intuition. Cette propriété surprenante est comme nous l'avons vu la conséquence de trois attributs de l'interaction électrostatique :

1. son caractère central;
2. sa dépendance en $1/r^2$;
3. et le respect du principe de superposition.

Application du théorème de Gauss

Dans certains cas, le théorème de Gauss sous sa forme intégrale permet de déterminer le champ électrique. Le calcul du champ électro-

statique créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé servira d'illustration.

Nous avons vu au [Chapitre 1](#) comment faire un calcul direct de ce champ en sommant la contribution de chaque élément de fil.

Voyons maintenant comment le théorème de Gauss permet d'obtenir le résultat plus simplement. Tout d'abord, le problème étant invariant vis-à-vis de toute translation suivant l'axe du fil et de toute rotation par rapport à celui-ci, on en déduit que le champ électrique ne dépend que de la distance au fil, que l'on notera r . Par ailleurs, tout plan contenant le fil est un plan de symétrie de sorte que pour tout point M de ce plan, le champ est dans ce plan. Mais le plan perpendiculaire au fil qui passe par M est aussi un plan de symétrie puisque le fil est infini. Il en découle que le champ électrique est radial : en coordonnées cylindriques on a

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$

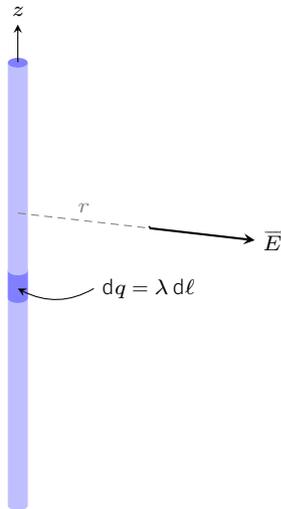


FIG. 7.5 : Fil rectiligne infini et uniformément chargé de densité linéique λ .

Il nous reste à déterminer la fonction $E(r)$ via le théorème de Gauss. L'astuce consiste à choisir une surface fermée qui permet de relier simplement le flux à $E(r)$. Un cylindre fermé de rayon r , dont l'axe coïncide avec le fil fera l'affaire. En effet, le flux du champ électrique à travers ce cylindre vaut

$$\Phi_E = \oiint_{\text{cylindre}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint_{(1)} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dS + \iint_{(2)} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS + \iint_{(3)} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 dS$$

où (1) et (3) correspondent aux bases du cylindre et (2) à la surface latérale. Comme on le voit sur le schéma, le champ électrique est perpendiculaire à \vec{n}_1 et \vec{n}_3 de sorte que le flux se résume au flux à travers la surface latérale cylindrique. Pour cette surface, le champ électrique est parallèle au vecteur \vec{n}_2 , aussi on a

$$\Phi_E = \iint_{(2)} E(r) dS = E(r) \iint_{(2)} dS = E(r) 2\pi r h$$

Selon le théorème de Gauss, ce flux vaut $Q_{\text{int}}/\epsilon_0$, avec Q_{int} la quantité de charge enfermée par le cylindre, c'est-à-dire ici $Q_{\text{int}} = \lambda h$. Finalement l'application du théorème de Gauss donne

$$E(r) 2\pi r h = \lambda h / \epsilon_0 \quad \text{soit} \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Le champ décroît en $1/r$ au fur et à mesure qu'on s'éloigne du fil².

Théorème de la divergence

Le théorème de la divergence³ relie le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée S , à la somme d'un scalaire en tout point du volume enfermé par S . Ce théorème fait appel à l'opérateur *divergence*, d'où son nom.

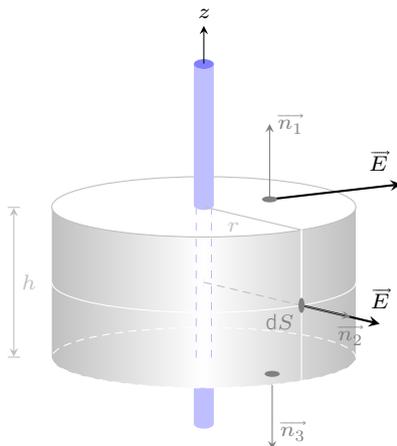


FIG. 7.6 : Calcul du flux à travers un cylindre fermé.

2 : Vu qu'en réalité un fil infini n'existe pas, il arrive un moment où la distance au fil est comparable à la longueur du fil. Dès lors on commence à « sentir » les effets de bords et l'évolution du champ commence à s'écarter sensiblement de l'expression trouvée. Si r est très grand devant la longueur du fil, on peut traiter le fil comme une charge quasi-ponctuelle de sorte que l'on attend une décroissance en $1/r^2$ à très grande distance.

3 : Ce théorème fut d'abord découvert par Lagrange en 1764, puis indépendamment par Gauss en 1813 et Green en 1828; mais c'est Ostrogradsky qui donna la première démonstration en 1831[5].

La divergence est un *opérateur* qui s'applique à un champ vectoriel et retourne un champ scalaire. Il se note

$$\operatorname{div}\vec{A} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

La dernière notation permet de retrouver son expression en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Imaginons un petit cube d'arête a centré en $M(x, y, z)$, et dont les faces sont des plans cartésiens. Voyons comment s'écrit le flux d'un champ vectoriel⁴ \vec{A} à travers ce cube.

Commençons par exprimer le flux ϕ_1 à travers la face (1) perpendiculaire à l'axe (Oy) et située en $y + a/2$:

$$\phi_1 = \iint_{(1)} \vec{A} \cdot \vec{u}_y \, dS = \iint_{(1)} A_y(x', y + a/2, z') \, dx' \, dz'$$

De même, le flux à travers la face située en $y - a/2$ vaut

$$\phi_2 = \iint_{(2)} \vec{A} \cdot (-\vec{u}_y) \, dS = \iint_{(2)} -A_y(x', y - a/2, z') \, dx' \, dz'$$

Appelons ϕ_y le flux à travers ces deux faces, et faisons tendre $a \rightarrow 0$. On peut alors considérer l'intégrand constant et égale à sa valeur au centre de la face :

$$\phi_y = \phi_1 + \phi_2 = [A_y(x, y + a/2, z) - A_y(x, y - a/2, z)] a^2$$

a étant un infiniment petit, on peut légitimement remplacer

$$\frac{A_y(x, y + a/2, z) - A_y(x, y - a/2, z)}{a} \quad \text{par} \quad \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y}$$

ce qui donne $\phi_y = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} a^3$. Ce même raisonnement réitéré sur les faces perpendiculaires aux axes (Ox) et (Oz) aboutit à

$$\phi_x = \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} a^3 \quad \text{et} \quad \phi_z = \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z} a^3$$

Finalement, le flux ϕ du champ vectoriel \vec{A} à travers un cube infinitésimal centré en (x, y, z) de volume infinitésimal $d\tau = a^3$ vaut

$$\phi = \left(\frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z} \right) d\tau = \operatorname{div}\vec{A} \, d\tau$$

Mettons dorénavant côte à côte deux cubes infinitésimaux. Lorsque l'on calcule le flux à travers ces deux cubes réunis, on s'aperçoit que la contribution due aux surfaces adjacentes se compensent, car les normales à ces faces sont opposées. Aussi, le flux total se réduit au flux à travers la surface frontière. Dès lors, on conçoit qu'en empilant de tels cubes en nombre infini, on puisse reconstituer un volume

4 : Que l'on suppose continûment dérivable en tout point du volume cubique.

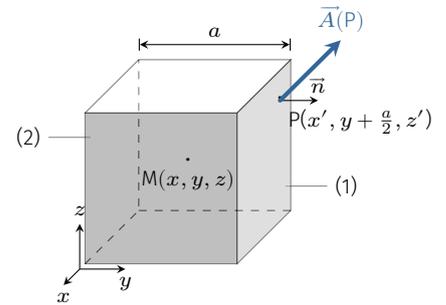


FIG. 7.7 : Calcul du flux à travers un cube.

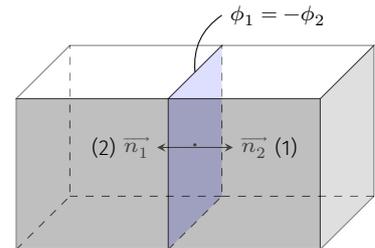


FIG. 7.8 : Le flux à travers deux cubes adjacents se réduit au flux à travers la surface qui délimite le volume constitué par la réunion des deux cubes.

fini, de sorte que le flux à travers la surface frontière soit égal à la somme des flux élémentaires produits à travers chaque petit cube constituant le volume. C'est le sens du théorème de la divergence.

Théorème de la divergence

L'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume V est égal au flux de ce champ à travers la surface fermée qui délimite le volume.

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \, d\tau$$

Ce théorème est aussi appelé *théorème de Green-Ostrogradsky*.

Équation de Maxwell-Gauss

Plaçons-nous dans le cadre d'un problème d'électrostatique, et imaginons une surface S délimitant un volume V quelconque. En vertu du théorème de Gauss, on a

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où Q_{int} est la charge électrique que contient le volume V . Adoptons une approche continue pour décrire la répartition des charges : un volume infinitésimal $d\tau$ centré en un point M contient une charge

$$dq = \rho \, d\tau$$

avec ρ la **densité volumique de charge** (en C.m^{-3}). On a donc

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, d\tau$$

Appliquons maintenant le théorème de la divergence :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, d\tau$$

Le volume V étant choisi quelconque, il en découle :

Équation de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.2)$$

Cette relation est dite locale car elle relie la source locale de charge (*via* ρ) avec ses effets électriques locaux (le champ électrique). Il s'agit de la première équation fondamentale de l'électromagnétisme et nous verrons ultérieurement que sa validité s'étend même aux régimes variables⁵.

5 : En régime variable la loi de Coulomb est violée ; de ce point de vue, on peut dire que l'équation de Maxwell-Gauss se révèle plus générale que la loi de Coulomb.

Discontinuité de la composante normale du champ

La relation de Maxwell-Gauss est une équation aux dérivées partielles dont les solutions font intervenir des constantes d'intégration. On détermine généralement ces constantes grâce aux propriétés de symétrie et aux conditions aux limites. Il est donc utile de connaître les *relations de passage* lorsque l'on traverse une interface séparant deux domaines chargés différemment. Pour cela imaginons une sur-

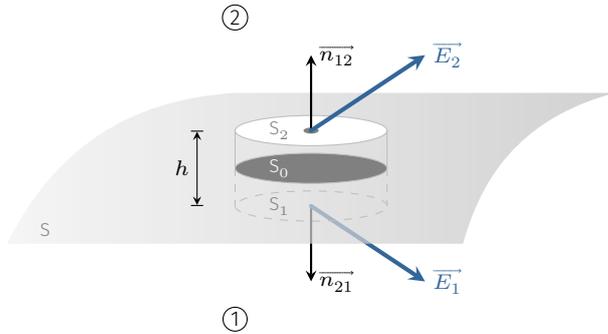


FIG. 7.9 : Interface chargée séparant deux milieux différents notés 1 et 2.

face S qui sépare deux domaines (1 et 2). Pour ne pas perdre en généralité, supposons que cette surface présente des charges avec une densité σ . Définissons une boîte cylindrique de petite hauteur h , qui traverse S perpendiculairement en découpant un petit contour fermé C . Appliquons le théorème de Gauss dans sa forme intégrale

$$\iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{21} dS + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12} dS + \iint_{\text{cylindre}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où \vec{n}_{12} est un vecteur normal à la surface dirigée de 1 vers 2. Faisons tendre h vers zéro. Dans ce cas, d'une part la charge intérieure se résume à la charge surfacique, et d'autre part le flux à travers la surface cylindrique latérale tend lui aussi vers 0. Il reste alors

$$-\iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{12} dS + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_0} \sigma dS$$

Par ailleurs, choisissons un contour C suffisamment petit pour pouvoir considérer la densité de charge et les champ électriques quasi-uniformes. Dans ce cas, le théorème de Gauss s'écrit

$$-\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{12} S_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12} S_2 = \frac{\sigma S_0}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad S_1 = S_2 = S_0$$

avec \vec{E}_1 (resp. \vec{E}_2) le champ électrique qui règne dans le milieu 1 (resp. 2) au voisinage de S . Après simplification, on obtient la relation cherchée :

Relation de passage

La composante normale du champ électrique est discontinue lors de la traversée d'une interface chargée. Cette discontinuité est d'autant plus grande que la densité de charge est importante.

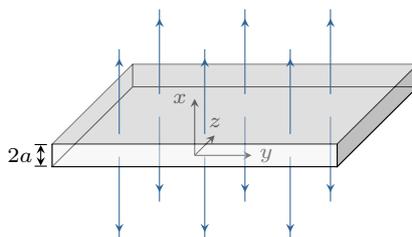
$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{7.3}$$


FIG. 7.10 : Nappe d'épaisseur $2a$, chargée uniformément en volume.

Exemple - Champ créé par une nappe chargée

Considérons une distribution de charges uniformément réparties entre les deux plans cartésiens d'équation $x = a$ et $x = -a$. La densité volumique de charge est donnée par

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La distribution des charges présente une invariance par translation suivant (Oy) et (Oz) . En conséquence le champ électrique ne dépend que de x . Par ailleurs, tout plan contenant l'axe (M, \vec{u}_x) est un plan de symétrie, de sorte que le champ électrique est nécessairement suivant \vec{u}_x . On a

$$\vec{E} = E(x) \vec{u}_x$$

Enfin, le plan $x = 0$ étant un plan de symétrie, on a $E(-x) = -E(x)$, ce qui permet de restreindre l'étude à \mathbb{R}^+ . L'équation de Maxwell-Gauss donne

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \frac{dE}{dx} = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} & \text{si } x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

L'intégration de ces équations est élémentaire :

$$E(x) = C_1 \quad \text{si } x > a \quad \text{et} \quad E(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x + C_2 \quad \text{si } x \leq a$$

Il nous reste à déterminer les deux constantes d'intégration. Tout d'abord la fonction $E(x)$ étant impaire, on a bien sûr $E(0) = 0$ ce qui implique $C_2 = 0$. Enfin, la composante normale du champ est continue en $x = a$ (car $\sigma = 0$) ce qui se traduit par

$$\lim_{x \rightarrow a^-} E(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} E(x) \quad \text{soit} \quad C_1 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} a$$

On en déduit l'évolution de la FIG. 7.11.

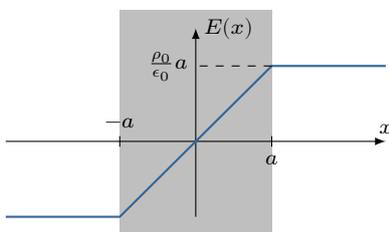


FIG. 7.11 : Evolution du champ électrique $E(x)$.

7.2 Circulation du champ électrostatique

Champ conservatif

Plaçons une charge ponctuelle q en O . Il règne alors dans l'espace un champ électrique donné par

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad r = OM$$

Faisons maintenant circuler ce champ le long d'un circuit C fermé et orienté. Par définition, la circulation est la quantité

$$\Gamma = \oint_C \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell}$$

où M parcourt le circuit C dans le sens positif, $d\vec{\ell}$ étant son vecteur déplacement infinitésimal.

Le déplacement présente une composante parallèle à \vec{u}_r et une composante perpendiculaire : $d\vec{\ell} = d\vec{\ell}_\perp + d\vec{\ell}_\parallel$. La composante parallèle, la seule qui nous intéresse pour le calcul de Γ , correspond au déplacement radial $d\vec{\ell}_\parallel = dr \vec{u}_r$ de sorte que la circulation s'écrit

$$\Gamma = \oint_C \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r_i}^{r_f}$$

Mais puisque le circuit est par hypothèse fermé, on a

$$r_i = r_f \text{ soit } \Gamma = 0$$

Si le champ électrique est produit par une distribution de charges $\{q_{i=1\dots N}\}$, conformément au principe de superposition, on a

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \text{ avec } \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = 0$$

de sorte que la circulation du champ résultant est également nulle.

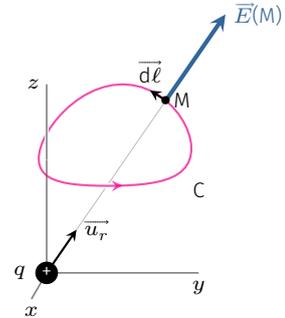


FIG. 7.12 : Circulation du champ électrique le long d'un circuit fermé orienté.

Circulation de \vec{E}

En régime statique, la circulation de \vec{E} le long de n'importe quel contour fermé est toujours nulle :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \text{ pour tout circuit fermé}$$

On dit que le champ électrostatique est à *circulation conservative*.

Notez que cette propriété serait encore vérifiée si la force électrique ne variait pas en $1/r^2$. Elle est à relier au fait que l'interaction coulombienne est une force centrale qui ne dépend que de r .

Théorème de Stokes

Le théorème de Stokes relie la circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour fermé, au flux d'un champ particulier à travers une surface s'appuyant sur le contour initial. Ce théorème fait intervenir un nouvel opérateur différentiel : *le rotationnel*.

L'opérateur rotationnel agit sur un champ vectoriel, et retourne également un champ vectoriel. Il se note

$$\text{rot } \vec{A} \text{ ou } \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

La dernière notation permet de retenir l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Imaginons un contour carré, d'arête a , centré en $M(x, y, z)$ et orienté dans le sens trigonométrique. Disposons provisoirement le contour perpendiculairement à l'axe (Ox) .

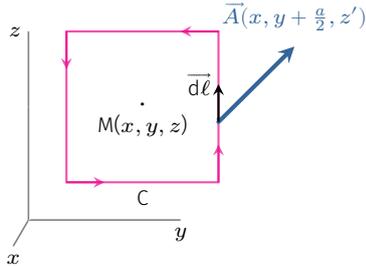


FIG. 7.13 : Circulation le long d'un carré orienté d'arête a .

La circulation d'un champ vectoriel \vec{A} le long de ce contour s'écrit

$$\Gamma = \int_{z-\frac{a}{2}}^{z+\frac{a}{2}} A_z(x, y + \frac{a}{2}, z') dz' + \int_{y+\frac{a}{2}}^{y-\frac{a}{2}} A_y(x, y', z + \frac{a}{2}) dy' + \int_{z+\frac{a}{2}}^{z-\frac{a}{2}} A_z(x, y - \frac{a}{2}, z') dz' + \int_{y-\frac{a}{2}}^{y+\frac{a}{2}} A_y(x, y', z - \frac{a}{2}) dz' \quad (7.5)$$

Faisons tendre $a \rightarrow 0$. On peut alors considérer les intégrands constants et égaux à la valeur qu'ils prennent au milieu du domaine d'intégration :

$$\Gamma \xrightarrow{a \rightarrow 0} d\Gamma = a \left[A_z(x, y + \frac{a}{2}, z) - A_y(x, y, z + \frac{a}{2}) - A_z(x, y - \frac{a}{2}, z) + A_y(x, y, z - \frac{a}{2}) \right]$$

Comme a est un infiniment petit, on peut remplacer

$$\frac{A_z(x, y + a/2, z) - A_z(x, y - a/2, z)}{a} \text{ par } \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial y} \text{ etc ...}$$

ce qui donne

$$d\Gamma = a^2 \left(\frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial z} \right) = a^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{u}_x$$

Évidemment, si l'on avait choisi un contour perpendiculaire à l'axe (Oy) on aurait trouvé $a^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{u}_y$. De manière générale, pour un contour infinitésimal d'aire dS , on trouve

$$d\Gamma = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface du contour infinitésimal, son sens étant relié à l'orientation du contour par la règle de la main droite ou du tire-bouchon⁶.

6 : Un tire-bouchon que l'on tourne dans le sens positif du contour orienté, se déplace dans la direction donnée par \vec{n} .

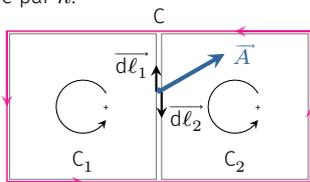


FIG. 7.14 : 2 contours cote à cote.

Mettons dorénavant côte à côte deux contours infinitésimaux C_1 et C_2 orientés dans le même sens, et notons C le contour externe. Lorsque l'on somme les circulations du champ \vec{A} le long des deux contours C_1 et C_2 , on s'aperçoit que les contributions dues aux côtés adjacents se compensent, car les vecteurs $d\vec{\ell}$ de ces côtés sont opposés. Ainsi la somme des circulations se réduit à la circulation de \vec{A} le long du bord extérieur C . Or, on peut toujours décomposer une surface finie S en une infinité de carrés adjacents, de sorte que si l'on somme les

termes $(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$ on retrouve la circulation le long du contour C sur lequel s'appuie S. C'est le sens du théorème de Stokes.

Théorème de Stokes

Le flux du rotationnel d'un champ vectoriel à travers une surface S est égal à la circulation de ce champ le long du circuit fermé C qui délimite la surface S.

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire normal à la surface S, dont le sens est associé au sens de parcours du circuit via la règle du tire-bouchon.

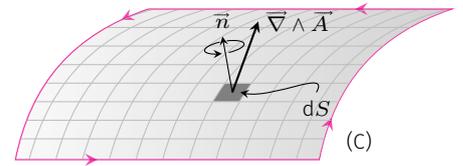


FIG. 7.15 : La circulation le long de C d'un champ vectoriel peut se calculer à partir du flux de son rotationnel à travers une surface s'appuyant sur C.

Notez qu'une conséquence de ce théorème est que le flux de tout champ qui dérive d'un rotationnel ($\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$) ne dépend que de \vec{A} et du contour sur lequel s'appuie la surface. Cette propriété sera particulièrement intéressante dans l'étude du champ magnétique.

Équation de Maxwell-Faraday statique

Comme nous l'avons vu, le champ électrostatique est à circulation conservative. En vertu du théorème de Stokes, on peut écrire

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{donc} \quad \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0$$

La dernière relation devant être vérifiée pour toute surface, il faut nécessairement que $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ partout. Nous venons de trouver la deuxième équation de Maxwell relative au champ électrostatique.

Equation de Maxwell-Faraday statique

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad \text{partout}$$

Cette propriété locale traduit le fait que le champ électrostatique est à circulation conservative. Associée à l'équation de Maxwell-Gauss elle permet de déterminer complètement le champ électrostatique.

Exercice – Soit un champ vectoriel $\vec{A}(M) = \vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}$ avec $\vec{B} = B \vec{u}_z$. Ce champ peut-il être un champ électrostatique ?

Rép. Non car $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} \neq \vec{0}$.

Continuité de la composante tangentielle du champ

Nous savons qu'à la traversée d'une nappe chargée, la composante normale du champ électrique subit une discontinuité donnée par la relation (7.3). Voyons maintenant ce qu'il en est pour la composante tangentielle. Pour cela, nous allons faire circuler le champ électrique

le long d'un contour rectangulaire (ABCD) qui coupe perpendiculairement une surface S chargée avec une densité σ .

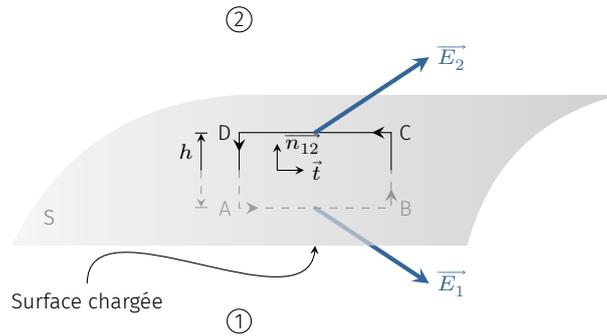


FIG. 7.16 : Contour rectangulaire coupant la surface chargée perpendiculairement.

Le caractère conservatif du champ se traduit par

$$\oint_{(ABCD)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{[AB]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[BC]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[CD]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[DA]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Appelons h la largeur du rectangle et ℓ sa longueur. Si l'on fait tendre $h \rightarrow 0$, le deuxième et le quatrième terme disparaissent. Par ailleurs, choisissons ℓ assez petit pour pouvoir considérer le champ électrique uniforme le long des tronçons rectilignes. On obtient alors l'équation

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{AB} + \vec{E}_2 \cdot \vec{CD} = 0 \quad \text{soit} \quad (E_{t1} - E_{t2})\ell = 0$$

avec E_{t1} et E_{t2} les composantes tangentes du champ de part et d'autre de la surface. On en déduit **la continuité de la composante tangentielle du champ à la traversée d'une surface chargée**. Finalement on retiendra la relation de passage pour le champ électrique.

Relation de passage du champ électrique

À la traversée d'une surface chargée, le champ électrique présente une *continuité* de sa composante tangentielle et une *discontinuité* de sa composante normale proportionnelle à la densité surfacique de charge σ :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad (7.6)$$

7.3 Potentiel électrique

Définition

Nous venons de voir qu'une distribution stationnaire de charges crée un champ électrostatique qui a la propriété d'être irrotationnel⁷. Or, on peut montrer que tout champ dérivant d'un gradient est irrotationnel, et réciproquement :

$$\vec{A}(M) = \vec{\nabla}\varphi(M) \iff \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M) = \vec{0}$$

7 : De rotationnel nul.

où $\varphi(M)$ est le *potentiel* associé au champ vectoriel.

Exemple

Considérons un potentiel $\varphi(x, y, z) = xy$ et vérifions que le champ vectoriel associé est effectivement irrotationnel. Le champ vectoriel \vec{A} vaut

$$\vec{A} = \vec{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant son rotationnel :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - 1 = 0 \end{pmatrix}$$

On a effectivement $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{0}$.

Dans le cas du champ électrostatique, le potentiel associé est appelé potentiel électrique et noté $V(M)$. Par définition, on a

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}V(M)$$

La présence du signe \ominus est purement conventionnelle.

On a déjà introduit ce potentiel dans le [Chapitre 2](#) à partir du travail de la force électrique. Rappelons ses propriétés :

- ▶ ce champ scalaire ne dépend que de l'espace, et est défini à une constante additive près;
- ▶ il s'exprime en volt dans le Système international d'unités;
- ▶ ses surfaces de niveau (équipotentielles) coupent les lignes de champ à angle droit;
- ▶ on peut calculer directement le potentiel électrostatique *via* l'expression

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad \text{ou} \quad V(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- ▶ Pour une distribution bornée, le potentiel est défini et continu.

Équation de Poisson

Considérons une région de l'espace qui présente une distribution stationnaire de charges électriques de densité volumique $\rho(x, y, z)$. Désignons par $\vec{E}(x, y, z)$ et $V(x, y, z)$, le champ électrique et le potentiel en un point de coordonnées (x, y, z) . On a vu que le théorème de Gauss se traduit localement par

$$\text{div}\vec{E}(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

De plus, par définition $\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla}V(x, y, z)$. En substituant, il vient

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}V(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

Cette équation aux dérivées partielles fait intervenir un nouvel opérateur différentiel que l'on appelle *laplacien* et note Δ :

$$\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) \quad \text{ou} \quad \Delta f = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} f = \nabla^2 f$$

La dernière notation permet de retenir l'expression du laplacien en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Finalement, le potentiel électrostatique obéit à une équation aux dérivées partielles, que l'on appelle l'*équation de Poisson* :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} = 0 \quad [\text{Eq. de Poisson}] \quad \heartsuit \quad (7.7)$$

La résolution de cette équation du second ordre introduit des constantes d'intégration que l'on détermine grâce aux conditions aux limites et à la propriété de continuité du potentiel.

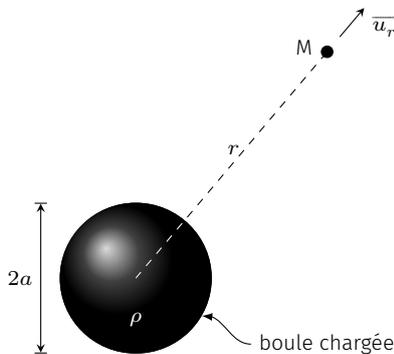


FIG. 7.17 : Boule de rayon a , uniformément chargée.

Exemple – Potentiel créé par une boule chargée

Disposons dans le vide une boule de rayon a , uniformément chargée avec une densité volumique ρ constante. À l'aide de l'équation de Poisson, déterminons le potentiel électrique qui règne en tout point de l'espace.

Compte tenu de la symétrie sphérique, on adopte les coordonnées sphériques et l'on sait que le potentiel ne dépend que de la coordonnée radiale r . En coordonnées sphériques, le laplacien s'écrit

$$\Delta f(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

de sorte que l'équation de Poisson s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > a \\ -\rho/\epsilon_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Commençons par trouver la forme du potentiel à l'extérieur de la boule. En intégrant deux fois par rapport à r on trouve

$$V(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 \quad \text{si } r > a$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration. Adoptons la convention habituelle $V = 0$ à l'infini. On en tire $C_2 = 0$ et

$$V(r) = \frac{C_1}{r} \quad \text{si } r > a$$

On peut déterminer C_1 car l'on sait quel est le comportement asymptotique du potentiel. En effet, si l'on se place très loin de la boule chargée, on verra essentiellement une charge ponctuelle. On prévoit donc

$$V(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}$$

Par identification, on en déduit⁸ $C_1 = \rho a^3 / (3\epsilon_0)$.

8 : On retrouve l'idée qu'une boule à symétrie sphérique produit à l'extérieur les mêmes effets que si toute la charge était concentrée en son centre.

À l'intérieur de la boule, l'équation de Poisson s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ce qui donne après une première intégration⁹ $r^2 \frac{dV}{dr} = -\rho \frac{r^3}{3\epsilon_0} + C_3$, puis en intégrant à nouveau :

$$V(r) = -\rho \frac{r^2}{6\epsilon_0} - \frac{C_3}{r} + C_4$$

Si C_3 était non nul on verrait le potentiel et le champ électrique diverger en $r = 0$, ce qui est impossible¹⁰. Par conséquent, C_3 est nécessairement nul.

Pour déterminer C_4 utilisons la continuité du potentiel en $r = a$:

$$\lim_{r \rightarrow a^-} V(r) = \lim_{r \rightarrow a^+} V(r) \quad \text{soit} \quad -\rho \frac{a^2}{6\epsilon_0} + C_4 = \rho \frac{a^2}{3\epsilon_0}$$

Ce qui donne $C_4 = \rho a^2 / (2\epsilon_0)$. Finalement, le potentiel s'écrit

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} & \text{si } r > a \\ \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.8)$$

Lorsque qu'une portion d'espace est exempte de charges électriques, l'équation de Poisson prend la forme simple suivante :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad [\text{Eq. de Laplace}] \quad \heartsuit \quad (7.9)$$

Il s'agit de l'équation de Laplace. L'ensemble des fonctions vérifiant cette équation aux dérivées partielles sont dites *harmoniques*.

Théorème d'unicité

Une stratégie pour résoudre un problème électrostatique consiste à résoudre l'équation de Poisson (ou Laplace) dans un certain domaine de l'espace. Ses bords imposent ce que l'on appelle des *conditions aux limites* :

- ▶ Soit on connaît la valeur du potentiel sur la frontière de la région considérée. Il s'agit alors d'un *problème de Dirichlet*¹¹.
- ▶ Soit on connaît la valeur de son gradient projeté sur la normale extérieure de la frontière. Il s'agit dans ce cas d'un *problème de Von Neumann*.

On montre en mathématique que si l'équation de Poisson admet une solution¹², celle-ci est *unique*. Plus précisément, dans un problème de Dirichlet, il existe un seul champ scalaire qui vérifie l'équation de Poisson et les conditions aux limites. Dans un problème de Von Neumann, le potentiel électrique est indéterminé à une constante additive près mais le champ électrique qui en dérive est unique. Ce théorème d'unicité rend de précieux services dans certains cas. Illustrons cela sur deux exemples.

9 : On exclut $r = 0$. Il suffira de prolonger $V(r)$ par continuité.

10 : D'une part le potentiel est fini, d'autre part le champ électrique est nul en $r = 0$, car le centre de la boule est un centre de symétrie.

11 : Par exemple un système de conducteurs dont les potentiels sont fixés par des générateurs, avec comme convention $V = 0$ à l'infini forme un tel problème.

12 : Si le problème de physique est bien posé, l'équation de Poisson admet forcément une solution.

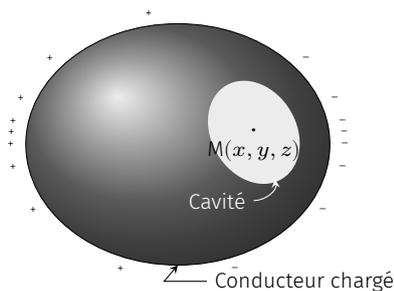


FIG. 7.18 : Cavité dans un conducteur chargé à l'équilibre.

Test de la loi de Coulomb

Toute violation de l'effet « cage de Faraday » serait le signe que l'interaction électrostatique ne suit pas une loi en $1/r^2$. À l'heure actuelle aucune expérience n'a réussi à mettre en défaut l'effet « cage de Faraday » et les mesures les plus récentes[6] permettent de conclure que la loi de Coulomb est en

$$\frac{1}{r^{2+\epsilon}} \text{ avec } |\epsilon| < 6 \cdot 10^{-17}$$

Le premier physicien à avoir entrepris ce type d'expérience est Henry Cavendish. Il trouva $|\epsilon| < 0,02$, ceci bien avant la célèbre expérience de Coulomb. L'histoire a préféré retenir la preuve directe de Coulomb, pourtant moins précise...

La cage de Faraday – Considérons un volume conducteur de forme quelconque présentant une cavité elle aussi de forme quelconque. Supposons cette cavité *complètement vide*, et le conducteur à l'équilibre et a priori chargé. Aucune hypothèse particulière n'est faite sur l'environnement extérieur au conducteur. Que sait-on du potentiel à l'intérieur de cette cavité? Étant donné l'absence de charges électriques, la fonction $V(x, y, z)$ obéit à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Avec comme condition aux bords de la cavité : $V = V_0$ où V_0 est le potentiel du conducteur qui –rapellons-le– est uniforme au sein d'un conducteur à l'équilibre. Or, il y a une solution évidente à ce problème. En effet la solution $V(x, y, z) = V_0$ vérifie bien l'équation de Laplace **et** les conditions aux limites. En vertu du théorème d'unicité, nous avons donc trouvé la solution :

$$V(x, y, z) = V_0 \text{ et } \vec{E}(x, y, z) = \vec{0} \text{ à l'intérieur de la cavité}$$

Autrement dit, à l'intérieur d'une cavité conductrice, le champ électrique est nul, ceci quel que soit le champ à l'extérieur du conducteur. Le conducteur sert donc de protection électrostatique entre l'extérieur et l'intérieur de la cavité : c'est l'**effet cage de Faraday**.

Méthode des images électriques – Imaginons différents corps chargés produisant un potentiel électrique $V(x, y, z)$ (FIG. 7.19). Supposons que l'on ait pu déterminer la surface équipotentielle S_0 correspondant à $V = V_0$. Supprimons les corps situés à l'intérieur de S_0 puis métallisons S_0 . Si l'on porte le conducteur ainsi formé au potentiel V_0 , un observateur extérieur à S_0 ne s'est aperçu de rien : en effet, le potentiel obéit à la même équation de Poisson avec les mêmes conditions aux limites que précédemment. Autrement dit, ces deux problèmes sont interchangeables, si l'on se limite aux effets électriques produits à l'extérieur de S_0 . C'est cette équivalence qui est à la base de la méthode des images électriques.

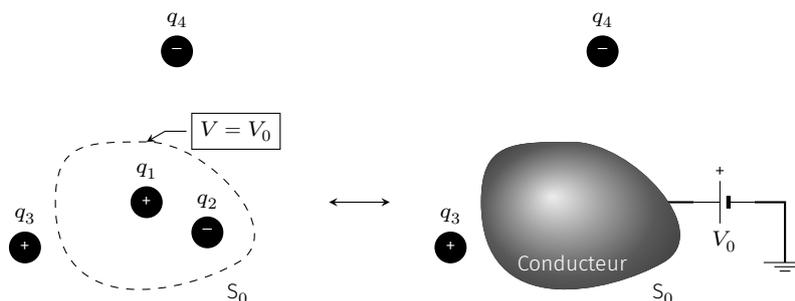


FIG. 7.19 : Méthode des images électriques. Du point de vue d'un point situé à l'extérieur de S_0 , les deux problèmes sont équivalents.

Par exemple, considérons le problème suivant : on approche une charge ponctuelle q à la distance d d'une plaque conductrice reliée à la terre (au potentiel $V = 0$). On cherche à déterminer la densité σ avec laquelle le conducteur se charge par influence. Pour cela il suffit de connaître le potentiel au voisinage du conducteur pour en tirer le champ électrique, puis σ à l'aide du théorème de Coulomb. On peut utiliser la méthode des images électriques ici. En effet, on sait que

deux charges opposées q et $-q$ situés en A et B produisent une équipotentielle $V = 0$ correspondant au plan médiateur du segment [AB]. C'est pourquoi, pour déterminer le champ et le potentiel électrique dans la portion $z > 0$ on peut remplacer le conducteur par son image électrique, à savoir une charge $-q$ située en $(0,0,-d)$. Aussi, on peut écrire que

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad \text{si } z > 0$$

Pour une résolution complète de ce problème, voir le [recueil d'exercice d'électromagnétisme I](#)

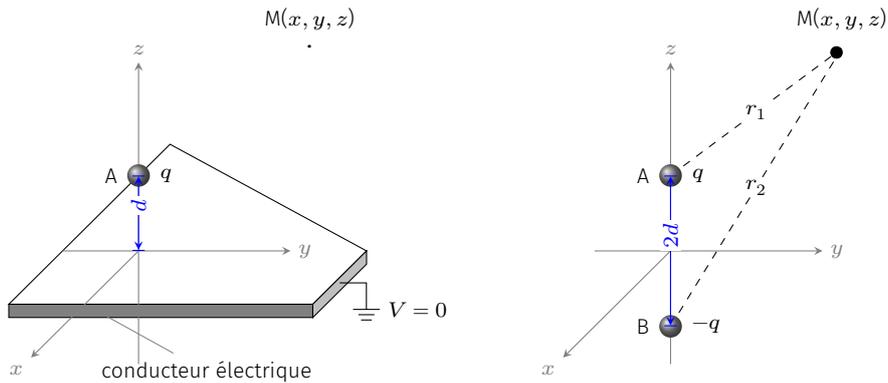


FIG. 7.20 : Influence d'une charge sur une plaque conductrice traitée par la méthode des images électriques.

Théorème de la moyenne

Supposons un domaine \mathcal{D} de l'espace, vide de charge, où règne champ et potentiel électrostatiques. On peut penser à la région située entre des conducteurs chargés et à l'équilibre par exemple. Dans ce domaine, le potentiel $V(x, y, z)$ obéit à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$.

Entourons un point $M(x, y, z)$ d'une sphère S_M de rayon¹³ r . On définit la moyenne du potentiel sur la sphère par

$$\langle V \rangle = \frac{\iint_{S_M} V \, dS}{4\pi r^2}$$

On montre alors que cette moyenne donne immédiatement la valeur du potentiel au centre de la sphère. Autrement-dit :

$$V(M) = \langle V \rangle$$

Cette propriété est mise à profit dans une méthode de résolution numérique, appelé *méthode de relaxation*. Cela consiste d'abord à produire un maillage de l'espace en le réduisant à un réseau discret. Ensuite, on fixe une valeur arbitraire aux nœuds du réseau sauf aux bords de la région où les conditions aux limites imposent une valeur précise¹⁴. L'algorithme consiste simplement à passer en revue tous les nœuds et à leur affecter une valeur correspondant à la moyenne des valeurs situées sur les nœuds voisins. En réitérant cette procédure, la valeur du potentiel en tout point converge vers la solution de l'équation de Laplace.

13 : La sphère possède un rayon quelconque. La seule condition est qu'elle doit se trouver entièrement dans \mathcal{D}

14 : On se place dans un problème de Dirichlet

► simulation : femto-physique.fr/analyse-numerique/methode-de-relaxation.php

7.4 Énergie électrostatique

Rappels

Considérons une distribution stationnaire de N charges électriques $\{q_{i=1,\dots,N}\}$. On note r_{ij} la distance qui sépare les charges q_i et q_j . Par définition, l'énergie électrostatique d'interaction $\mathcal{E}_{p \text{ int}}$ d'un tel système représente le travail qu'un opérateur doit fournir pour amener, de façon quasi-statique et depuis l'infini, les charges dans leur position finale.

Comme on l'a démontré dans le [Chapitre 2](#), cette énergie ne dépend pas de la manière dont on s'y prend pour constituer le système, et il suffit de sommer autant de termes $q_i q_j / (4\pi\epsilon_0 r_{ij})$ qu'il y a de couples (i, j)

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \sum_{\text{couples } (i,j)} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (7.10)$$

On peut aussi reformuler en faisant intervenir le potentiel que subit la charge q_i

$$V_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p \text{ int}} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (7.11) \end{aligned}$$

Cette dernière expression prend une forme intégrale pour une distribution continue de charges

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\mathbf{M}) V(\mathbf{M}) d\tau \quad \heartsuit \quad (7.12)$$

où \mathcal{D} est une distribution volumique de charges.

Exemple : énergie d'une boule uniformément chargée

Reprenons l'exemple de la boule de rayon a uniformément chargée. La résolution de l'équation de Poisson a donné

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > a \\ \rho & \text{sinon} \end{cases} \implies V(r) = \begin{cases} \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} & \text{si } r > a \\ \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

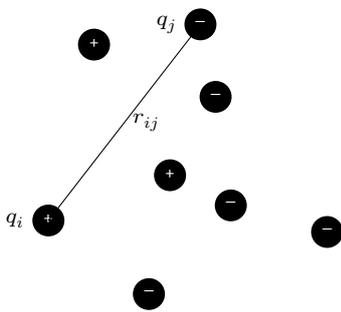


FIG. 7.21 : Distribution de N charges ponctuelles.

On rappelle que

$$\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = \sum_{i,j < i} u_{ij} + \sum_{i,j > i} u_{ij}$$

ce qui donne lorsque $u_{ij} = u_{ji}$

$$\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = 2 \sum_{i,j < i} u_{ij}$$

L'énergie potentielle d'interaction vaut donc

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{r \leq a} \frac{\rho^2}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) d\tau$$

avec $d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ en coordonnées sphériques. Après intégration sur θ et φ on obtient l'intégrale simple

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\rho^2}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) 4\pi r^2 dr = \frac{4}{15} \pi \frac{\rho^2 a^5}{\epsilon_0}$$

Si l'on fait intervenir la charge totale $Q = \rho \times \frac{4}{3}\pi a^3$ on aboutit au résultat

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

De manière générale, l'énergie propre d'un système chargé de charge totale Q , confiné dans un volume de taille caractéristique a présente une énergie électrostatique

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \beta \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

avec β un coefficient adimensionné qui dépend de la façon dont les charges sont réparties dans le volume.

Densité d'énergie volumique

Il est possible de relier cette énergie uniquement au champ électrique. Pour cela il suffit de manipuler un peu l'équation (7.12). Commençons par remarquer que l'on peut intégrer ρV sur tout l'espace, car dans le vide on a $\rho = 0$:

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\mathbf{M}) V(\mathbf{M}) d\tau \quad \text{où } \mathcal{D} = \text{tout l'espace}$$

Remplaçons maintenant ρ par $\epsilon_0 \text{div} \vec{E}$ en vertu de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \epsilon_0 V \text{div} \vec{E} d\tau$$

puis utilisons l'identité

$$\text{div} (V \vec{E}) = V \text{div} \vec{E} + \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V = V \text{div} \vec{E} - E^2$$

Il vient donc

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\mathcal{D}} \text{div} (V \vec{E}) d\tau + \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

Le théorème de la divergence permet de transformer la première intégrale :

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \oint_S V \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

où la surface S est une sphère de rayon $r \rightarrow \infty$ de façon à pouvoir englober tout l'espace. Or nous savons que si l'on se place assez loin d'une distribution localisée, le potentiel et le champ électrique tendent vers 0 le premier en $1/r$, le second $1/r^2$. Comme l'aire de la surface d'intégration croît en r^2 il vient immédiatement que l'intégrale de flux tend vers 0 quand $r \rightarrow \infty$ ¹⁵. Finalement, on aboutit à

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau \quad \text{où } \mathcal{D} = \text{tout l'espace} \quad \heartsuit \quad (7.13)$$

Aussi surprenant que cela puisse paraître, cette dernière relation ne contient aucune référence explicite aux sources de champ. Tout se

15 : Si la distribution est neutre, la convergence n'en sera que mieux assurée puisque V et E tendront vers 0 encore plus rapidement.

se passe comme si l'énergie électrostatique d'une distribution de charges était localisée, non pas dans les charges, mais dans l'espace à raison de $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ joules par mètre cube. On définit alors une *énergie électrostatique volumique*

$$w_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad [\text{J}\cdot\text{m}^{-3}] \quad \heartsuit \quad (7.14)$$

Exercice – Retrouver l'énergie d'une boule uniformément chargée à partir de l'expression du champ électrostatique.

Discussion

Pour terminer, attardons-nous un instant sur quelques questions que peuvent soulever les derniers résultats.

Tout d'abord, n'est-il pas troublant que l'expression

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\text{M})V(\text{M}) \, d\tau$$

fasse intervenir le potentiel $V(\text{M})$, fonction qui est indéterminée ? Est-ce à dire que l'énergie est indéterminée ? Rassurez-vous, l'énergie est bien définie ; mais l'expression ci-dessus ne fait pas intervenir n'importe quel potentiel. En effet dans l'expression

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

on a $V_i = \sum_j q_j / (4\pi\epsilon_0 r_{ij})$, c'est-à-dire le potentiel électrique qui prend la valeur nulle quand $r_{ij} \rightarrow \infty$. On retiendra donc que l'expression de l'énergie fait intervenir un potentiel particulier celui pour lequel l'origine est fixée à l'infini.

D'autre part, nous avons montré que l'énergie potentielle électrostatique peut s'interpréter comme une énergie de champ

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\text{M})V(\text{M}) \, d\tau = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \, d\tau > 0$$

Indubitablement, la dernière expression impose $\mathcal{E}_{\text{p int}} > 0$. Or, tout chimiste sait que l'énergie électrostatique d'un cristal ionique est négative, d'autant plus négative que la cohésion est importante. Par exemple deux charges q et q' de signe opposé, et disposées à une distance r présentent une énergie

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} < 0$$

Il y a donc là une contradiction.

En fait, dans la formule

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\text{M})V(\text{M}) \, d\tau$$

V désigne le potentiel créé par toutes les charges, sans exclusion de charge située au point M , alors que dans l'expression

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

V_i représente le potentiel créé par toutes les charges autres que q_i . Aussi, la dernière expression n'inclut pas ce que l'on appelle l'énergie propre des charges.

Pour éclaircir cet aspect, prenons deux distributions \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de charge totale respective q_1 et q_2 . Appelons ρ_1 et ρ_2 la densité de charge de chacune des distributions. L'énergie totale du système s'écrit

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} [\rho_1(M) + \rho_2(M)] V(M) d\tau \quad \text{avec} \quad V(M) = V_1(M) + V_2(M)$$

$V_1(M)$ et $V_2(M)$ étant les potentiels créés par \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 en M . En développant on trouve

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_1} \rho_1 V_1 d\tau}_{\text{énergie de } \mathcal{D}_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_2} \rho_2 V_2 d\tau}_{\text{énergie de } \mathcal{D}_2} + \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_1} \rho_1 V_2 d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_2} \rho_2 V_1 d\tau}_{\mathcal{E}_p^{12}}$$

Les deux premiers termes représentent les énergies propres à chaque distribution, et le terme \mathcal{E}_p^{12} est appelé *énergie d'interaction mutuelle*. Imaginez maintenant que l'on réduise le volume des distributions de façon à pouvoir les assimiler à deux charges ponctuelles. On trouve alors

$$\mathcal{E}_p^{12} \rightarrow \frac{1}{2} \left(V_2 \iiint_{\mathcal{D}_1} \rho_1 d\tau + V_1 \iiint_{\mathcal{D}_2} \rho_2 d\tau \right) = \frac{1}{2} (q_1 V_2 + q_2 V_1)$$

On voit alors que l'énergie d'interaction mutuelle s'identifie à l'énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles.

En résumé

L'énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

n'intègre pas l'énergie propre de chaque charge contrairement à l'expression

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(M) V(M) d\tau = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

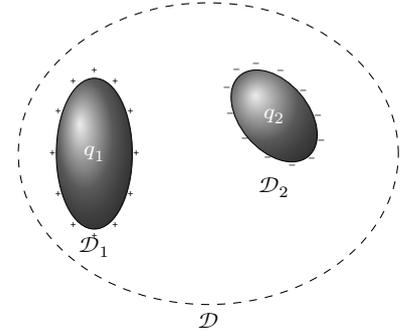


FIG. 7.22 : Distribution formée de deux corps chargés.

Dans le cas d'une distribution de charges ponctuelles, l'énergie propre pose une difficulté majeure. En effet si l'on cherche par exemple à cal-

culer l'énergie propre d'une charge ponctuelle on trouve

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0 r^2)^2} d\tau \rightarrow \infty$$

Ce résultat dit simplement qu'il faut fournir une énergie infinie pour concentrer une charge avec une densité infinie en un point, ce qui n'est pas vraiment surprenant. En réalité, cela souligne que le concept de charge ponctuelle n'est pas satisfaisant dans le cadre de la théorie électromagnétique.

PROPRIÉTÉS DU CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE

8

À l'instar du champ électrostatique, le champ magnétostatique obéit à des relations mathématiques locales qui renseignent sur sa structure et son lien aux courants. Nous verrons dans ce chapitre que, de la même manière qu'il existe un potentiel électrostatique, il existe également un potentiel (vectoriel) dont dérive le champ magnétique. Cette nouvelle grandeur jouera un rôle important dans l'étude du phénomène d'induction.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/proprietes-locales-B.php>

8.1 Théorème d'Ampère

Loi de Biot et Savart

Considérons un conducteur C parcouru par un courant électrique d'intensité I . Comme on l'a déjà vu, le transport d'électricité est quantifié par le vecteur densité de courant volumique \vec{j} dont le flux à travers une section de C donne I :

$$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = I \quad (8.1)$$

$[\text{A} \cdot \text{m}^{-2}] \times [\text{m}^2] \quad [\text{A}]$

En régime stationnaire, toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps¹. En conséquence, les porteurs de charge ne peuvent s'accumuler, mais simplement transiter : le flux de \vec{j} à travers n'importe quelle surface fermée est nécessairement nul ce qui se traduit mathématiquement par la relation²

$$\text{div} \vec{j} = \vec{0} \quad (8.2)$$

Comme Ørsted l'a montré le premier en 1820, un circuit parcouru par un courant électrique permanent est responsable de l'apparition d'un champ magnétique. Biot et Savart en ont donné une formulation pour un circuit filiforme :

$$\vec{B} = \oint_C d\vec{B} = \oint_C \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad (8.3)$$

Si l'on ne peut pas négliger l'épaisseur des fils, il faut considérer que le courant est distribué en volume. Prenons une portion de longueur $d\ell$ et isolons un tube de courant de section infinitésimale dS . Ce tube transporte un courant d'intensité $dI = \vec{j} \cdot \vec{n} dS$. La quantité $dI d\vec{\ell}$, parfois appelé élément de courant, s'écrit

- 8.1 Théorème d'Ampère . . . 89
 - Loi de Biot et Savart . . . 89
 - Théorème d'Ampère . . . 90
 - Eq. de Maxwell-Ampère . . 92
- 8.2 Flux du champ 93
 - Eq. de Maxwell-Thomson . . 93
 - Champ à flux conservatif . . 94
- 8.3 Potentiel vecteur 95
 - Définition 95
 - Équation de Poisson 96
 - Son expression 96
 - Méthodes de calcul 97
- 8.4 Relations de passage . . . 99
 - Courants surfaciques . . . 99
 - Composante normale 99
 - Composante tangentielle . . 100
 - Le solénoïde infini 101
- 8.5 Résumé 102

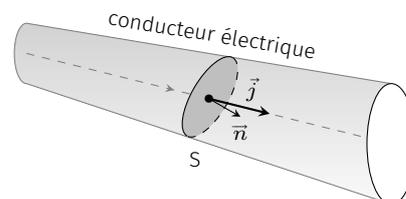


FIG. 8.1 : Flux électrique.

1 : Par exemple, la densité des porteurs de charge ou la densité volumique de courant ne dépendent que de l'espace.

2 : Voir la relation de continuité au Chapitre 10.

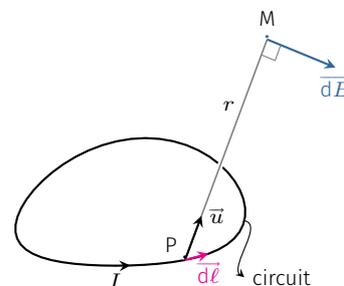


FIG. 8.2 : Notations associées à la loi de Biot et Savart.

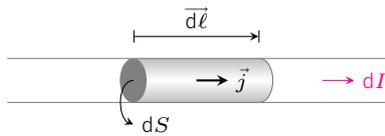


FIG. 8.3 : Tube de courant élémentaire dans lequel on isole une portion conductrice de volume $d\tau = dSd\ell$.

$$d\vec{C} = dI d\vec{\ell} = \vec{j} \cdot \vec{n} dS d\vec{\ell} = \vec{j} dS d\ell = \vec{j} d\tau \quad (8.4)$$

Ainsi, en décomposant une distribution volumique en une superposition de distributions filiformes d'élément de courant $d\vec{C} = \vec{j} d\tau$, on obtient une nouvelle formulation :

Loi de Biot et Savart

Une distribution de courants permanents produit un champ magnétostatique \vec{B} donné par la loi

$$\vec{B} = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \wedge \vec{u}}{r^2} d\tau \quad \text{avec} \quad \text{div} \vec{j} = 0 \quad (8.5)$$

Expression dans laquelle il suffit de remplacer $\vec{j} d\tau$ par $I d\vec{\ell}$ pour une distribution filiforme.

L'intégrale (8.5) ne pose pas de problème de convergence pour les distributions réalistes, c'est-à-dire volumiques et finies. Toutefois, dans certaines situations idéalisées (distribution filiforme ou surfacique) l'intégrale n'est pas définie pour tout point situé sur la distribution.

Théorème d'Ampère

La loi de Biot et Savart relie le courant électrique au champ magnétique via un intermédiaire de calcul ($d\vec{B}$) que l'on somme le long du circuit électrique. Le théorème d'Ampère est une autre manière d'exprimer ce lien en faisant intervenir la circulation du champ magnétique.

Pour illustrer cette propriété, considérons un conducteur rectiligne infini parcouru par un courant permanent d'intensité I . Comme on l'a vu au Chapitre 6, il règne autour d'un tel conducteur un champ magnétique orthoradial dont l'intensité décroît proportionnellement à l'inverse de la distance au fil électrique. Formellement on a en coordonnées cylindriques

$$\vec{B}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

lorsque le fil est confondu avec l'axe orienté (Oz).

Dessignons maintenant un contour C , fermé et orienté, puis calculons la circulation du champ \vec{B} le long de C (Fig. 8.5). On rappelle qu'en coordonnées cylindriques, le déplacement infinitésimal s'écrit $d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$. On a donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta$$

À partir de là, distinguons deux cas :

1. C se referme sans enlacer le fil conducteur;

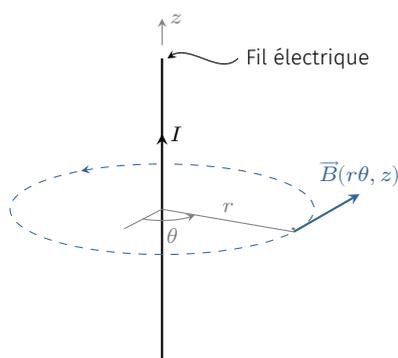


FIG. 8.4 : Fil infini rectiligne parcouru par un courant électrique permanent.

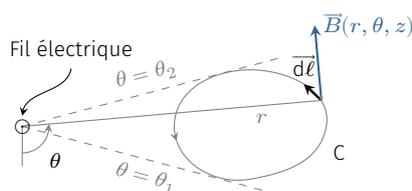


FIG. 8.5 : Circulation du champ magnétique à travers un circuit C orienté.

2. C se referme en enlaçant au moins une fois le fil électrique.

Dans le premier cas, θ augmente à partir de θ_1 puis diminue à partir de θ_2 jusqu'à retrouver sa valeur initiale. Par conséquent, $\oint d\theta = 0$: la circulation de \vec{B} est nulle si C n'enlace pas le fil électrique. Dans

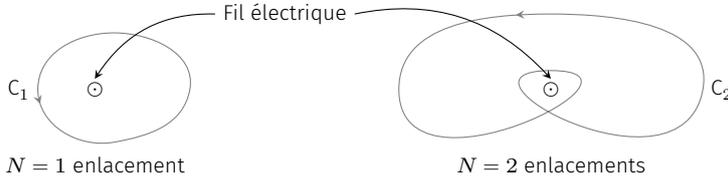


FIG. 8.6 : Différents enlacements. Le circuit C_1 enlace une fois le fil électrique alors que C_2 l'enlace deux fois.

le second cas, θ croît entre 0 et 2π pour $N = 1$ enlacement, entre 0 et 4π pour $N = 2$ enlacements, en général entre 0 et $2N\pi$ après N enlacements. On a donc

$$\oint_0^{2N\pi} d\theta = 2N\pi \quad \text{soit} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 NI$$

La circulation du champ magnétique créé par un fil rectiligne infini ne dépend pas de la forme de C mais uniquement du nombre d'enlacements autour du conducteur ainsi que l'intensité électrique. Cette propriété étonnante, recèle une autre surprise : elle s'avère générale, c'est-à-dire valable pour **tous les circuits électriques**³.

3 : Pour une démonstration voir [2].

Théorème d'Ampère pour une distribution filiforme

Une distribution de courants filiformes permanents crée un champ magnétostatique dont la circulation le long d'un circuit C fermé quelconque vaut

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_e \tag{8.6}$$

où I_e est la somme algébrique des intensités parcourant les fils enlacés par C.

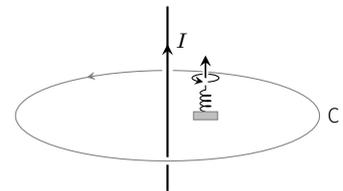


FIG. 8.7 : Le courant enlacé est compté positivement ici.

Notez que I_e est une quantité *algébrique* qui dépend du sens du courant et de l'orientation du circuit C. Si le courant enlacé a le même sens que la progression d'un tire-bouchon tournant dans le sens du circuit C, alors I_e est compté positivement. Dans le cas contraire, il est compté négativement.

Exercice – La FIG. 8.8 représente un circuit électrique produisant un champ magnétique. Que vaut la circulation du champ magnétique le long du cercle C orienté ?

Rép. $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -4\mu_0 I$

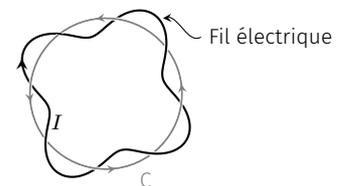


FIG. 8.8 : Circulation à calculer

Dans le cas d'une distribution non filiforme, il faut compter le flux électrique qui traverse le circuit C dans le sens indiqué par la règle du tire-bouchon. Autrement dit $I_e = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$ où S est une surface qui s'appuie sur C. Insistons sur le fait que toute surface convient, tant qu'elle s'appuie sur C. En effet le flux de \vec{j} à travers S ne dépend

que du contour qui délimite S ; c'est la conséquence du fait que \vec{j} est à flux conservatif ($\text{div}\vec{j} = 0$).

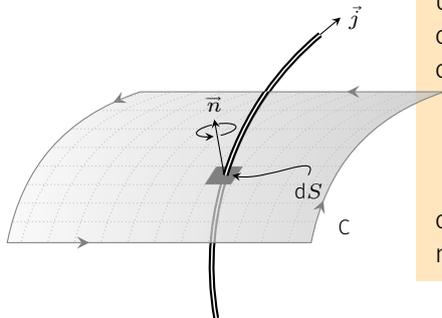


FIG. 8.9 : Calcul du courant enlacé en termes de densité de courant.

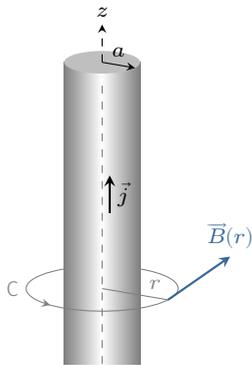


FIG. 8.10 : Conducteur cylindrique de rayon a parcouru par un courant axial uniforme et permanent.

Théorème d'Ampère pour une distribution volumique

Une distribution de courants permanents de densité volumique \vec{j} crée un champ magnétostatique dont la circulation le long d'un circuit C fermé quelconque vaut

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS \quad (8.7)$$

où S est une surface qui s'appuie sur C et \vec{n} un vecteur unitaire normal à dS et orienté via la règle du tire-bouchon.

Application – Fil rectiligne de section non négligeable

Considérons un conducteur cylindrique de rayon a parcouru par un courant électrique uniforme et axial (suivant Oz) d'intensité I . Ce problème présente une grande symétrie puisque tout plan contenant l'axe du cylindre est un plan de symétrie de la distribution de courant. Par conséquent le champ magnétique \vec{B} est orthoradial. Par ailleurs, la symétrie cylindrique rend le champ magnétique invariant vis à vis de z et θ :

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$$

Dans des situations comme celle-ci où la structure du champ est assez simple, on peut utiliser le théorème d'Ampère pour calculer B . Ici, par exemple, il suffit d'appliquer le théorème d'Ampère en choisissant un contour C circulaire d'axe (Oz) et de rayon r (FIG. 8.10). Calculons la circulation de \vec{B} le long de C :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B(r) dl = B(r) \oint dl = B(r) \times 2\pi r$$

Quant au courant enlacé, il dépend de la taille de C :

- ▶ si $r \geq a$ alors $I_e = I$;
- ▶ si $r < a$ alors $I_e = \iint \vec{j} \cdot \vec{n} dS = j\pi r^2$ avec $j = I/(\pi a^2)$.

Le théorème d'Ampère donne immédiatement $B(r)$:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{si } r \geq a \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & \text{si } r < a \end{cases}$$

On note que le champ magnétique créé à l'extérieur du cylindre conducteur est identique à celui d'un courant rectiligne filiforme de même intensité.

Équation de Maxwell-Ampère statique

Le théorème d'Ampère peut prendre une forme locale si l'on se souvient de la formule de Stokes :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

avec S s'appuyant sur C .

Prenons comme champ vectoriel le champ magnétostatique \vec{B} et utilisons le théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

Pour que la dernière égalité soit réalisée pour toute surface il faut nécessairement

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \heartsuit \quad (8.8)$$

Cette relation est appelée *équation de Maxwell-Ampère statique*, car elle n'est valable qu'en régime stationnaire. Nous verrons ultérieurement qu'elle viole le principe de conservation de la charge en régime variable; il faudra alors procéder à une modification de cette équation pour l'étendre à tous les régimes.

8.2 Flux du champ magnétostatique

Équation de Maxwell-Thomson

Montrons, à l'aide de la relation de Biot et Savart, que $\text{div } \vec{B} = 0$. Plaçons nous dans le contexte d'une distribution filiforme⁴ :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

On cherche à calculer la divergence de \vec{B} , c'est-à-dire

$$\text{div } \vec{B}(M) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Où l'on dérive par rapport aux *coordonnées de M*. Dans la formule de Biot et Savart, l'intégrale ne concerne pas le point M ⁵; on peut donc intervertir l'ordre des opérations :

$$\text{div } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{div} \left(\oint_C \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \text{div} \left(\frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} \right)$$

Utilisons maintenant l'identité $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}$ en prenant $\vec{A} = d\vec{\ell}$ et $\vec{B} = \vec{u}/r^2$:

$$\text{div } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\oint_C \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot \text{rot } d\vec{\ell} - \oint_C \text{rot} \left(\frac{\vec{u}}{r^2} \right) \cdot d\vec{\ell} \right]$$

La première intégrale est nulle, car $d\vec{\ell}$ ne dépendant pas de M ⁶ on a $\text{rot } d\vec{\ell} = \vec{0}$. La seconde intégrale est également nulle car $\text{rot}(\vec{u}/r^2) = \vec{0}$. En effet, \vec{u}/r^2 est un gradient⁷, et le rotationnel d'un gradient est nul! Finalement, on établit la relation

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \heartsuit \quad (8.9)$$

4 : Le résultat est identique pour une distribution volumique. On laisse au lecteur le soin de le montrer en exercice.

5 : On intègre selon les coordonnées (x', y', z') d'un point P qui parcourt le circuit.

6 : $d\vec{\ell} = dx' \vec{u}_x + dy' \vec{u}_y + dz' \vec{u}_z$.

7 : Souvenez-vous du fait que le champ électrique d'une charge ponctuelle est en \vec{u}/r^2 et dérive d'un gradient en $1/r$. Précisément il est facile de montrer que $\vec{u}/r^2 = -\text{grad}(1/r)$.

8 : Plus précisément, si deux champs \vec{B}_1 et \vec{B}_2 sont solutions des équations (8.8) et (8.9) alors leur différence est un champ de rotationnel nul et de divergence nulle, c'est-à-dire un champ uniforme. Aussi les deux équations de Maxwell déterminent le champ magnétique à un champ uniforme près.

Il s'agit de l'équation de Maxwell-Thomson qui restera valide en régime variable.

Les équations (8.8) et (8.9) déterminent le champ magnétique de façon univoque pour une distribution de courant donné⁸.

Champ à flux conservatif

Rappelons que le flux magnétique à travers une surface S est la quantité

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface S. Le flux magnétique s'exprime en weber (Wb) et joue un rôle important dans les phénomènes d'induction.

Choisissons une surface fermée S et orientons \vec{n} vers l'extérieur de S : ϕ_B désigne alors le flux magnétique sortant. En vertu du théorème de la divergence et de l'équation de Maxwell-Thomson (8.9), on a

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \, dS = \iiint_V \text{div} \vec{B} \, d\tau = 0$$

On dit que \vec{B} est un champ vectoriel à flux conservatif. Ainsi contrairement à la situation que l'on peut observer en électrostatique, les lignes du champ \vec{B} ne peuvent pas toutes sortir d'une surface fermée ; certaines doivent y entrer pour produire un flux net rigoureusement nul. En conséquence, un point⁹ d'où émergerait des lignes de champ, à l'instar de la charge électrique pour le champ électrique, ne peut être observé.

9 : Un tel point source de champ magnétique est appelé *monopôle magnétique* et est exclu de la théorie de Maxwell. Certaines théories postulent l'existence de monopôles magnétiques, mais à l'heure actuelle rien ne permet de penser qu'ils existent.

Une autre conséquence est que le flux magnétique à travers une surface non fermée S ne dépend que du circuit C sur lequel s'appuie S¹⁰. En effet, choisissons un contour orienté C et deux surfaces S₁ et S₂ s'appuyant sur C (Fig. 8.11). Par construction, la réunion S des deux surfaces est une surface fermée ; on a donc

10 : On a la même conséquence pour le vecteur densité de courant en régime permanent puisque $\text{div} \vec{j} = 0$.

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \, dS = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \, dS + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \, dS = 0$$

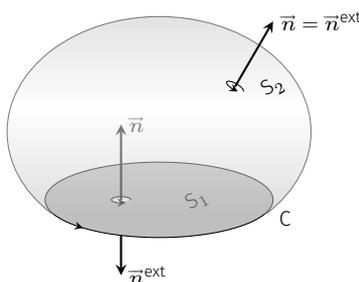


FIG. 8.11 : Le flux magnétique ne dépend que du contour C et du champ magnétique.

Orientons par exemple C de sorte que $\vec{n} = \vec{n}^{\text{ext}}$ pour S₂. Dans ce cas, $\vec{n} = -\vec{n}^{\text{ext}}$ pour S₁ et il vient :

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$

ceci, quelles que soient les surfaces S₁ et S₂, pourvu qu'elles s'appuient sur le même contour. Autrement dit le flux magnétique ne dépend que du champ magnétique et de la forme du contour.

8.3 Potentiel vecteur

Définition

Nous avons vu en électrostatique que \vec{E} est un gradient, car $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$. En magnétostatique, \vec{B} est de divergence nulle ce qui est le propre de tout champ rotationnel :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \heartsuit \quad (8.10)$$

Le champ vectoriel \vec{A} s'appelle le **potentiel vecteur**.

Exemple

Prenons $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x, y, z) \end{pmatrix}$ où f est une fonction de classe C^2 . Calculons son rotationnel puis vérifions qu'on obtient bien un champ de divergence nulle. On a

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et la divergence de ce champ rotationnel vaut

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$$

Or, en vertu du théorème de Schwarz, une dérivation partielle à l'ordre 2 ne dépend pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation. On en déduit ici que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$.

Le potentiel vecteur s'exprime en T.m ou en Wb/m. Il y a en effet un lien entre le flux magnétique et la circulation du potentiel vecteur :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \phi_B \quad \heartsuit \quad (8.11)$$

où l'on voit manifestement, comme on l'a déjà signalé, que le flux magnétique ne dépend que de la forme du contour et du champ magnétique¹¹.

À l'instar du potentiel électrostatique, \vec{A} est un *champ indéterminé*. Plus précisément, \vec{A} est défini à un gradient près. En effet, si \vec{A} est un potentiel vecteur associé au champ \vec{B} ($\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$), alors le champ $\vec{A} + \vec{\nabla} f$ convient aussi puisque

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{B}$$

Cette indétermination nous procure donc une certaine liberté dans le choix de \vec{A} . Un choix souvent réalisé en magnétostatique consiste à imposer $\text{div } \vec{A} = 0$. On dit qu'on se place dans la *jauge de Coulomb*.

¹¹ : le potentiel vecteur plus exactement.

Équation de Poisson

Nous avons déjà rencontré une équation reliant potentiel et sources en électrostatique; il s'agit de l'équation de Poisson de l'électrostatique :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

On rencontre une équation du même type en magnétostatique en introduisant \vec{A} dans l'équation de Maxwell-Ampère statique (8.8) :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

Utilisons l'identité $\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{A}) = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$. Par ailleurs, fixons-nous la jauge de Coulomb $\text{div} \vec{A} = 0$. L'équation de Maxwell-Ampère prend la forme d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, appelée *équation de Poisson de la magnétostatique* :

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \text{div} \vec{A} = 0 \quad \heartsuit \quad (8.12)$$

Expression du potentiel vecteur

Profitons de l'analogie avec l'équation de Poisson de l'électrostatique pour déterminer une expression du potentiel vecteur. Si l'on projette (8.12) suivant l'axe (Oz) on trouve une équation scalaire

$$\Delta A_z + \mu_0 j_z = 0 \quad \text{formellement analogue à} \quad \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Or, on sait que $V = \iiint \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r} d\tau$ est solution de l'équation de Poisson électrostatique. Par analogie, on en déduit que

$$A_z = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0 j_z}{4\pi r} d\tau$$

est *une* solution de l'équation de Poisson magnétostatique. Le même raisonnement peut se faire pour les trois composantes cartésiennes. En les regroupant on obtient une expression intégrale pour \vec{A} .

Expression du potentiel vecteur

Dans la jauge de Coulomb ($\text{div} \vec{A} = 0$), le potentiel vecteur est relié aux sources de courant *via*

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\vec{j} d\tau}{r} \quad (8.13)$$

Pour une distribution filiforme, l'intégrale est curviligne et $\vec{j} d\tau$ devient $I d\vec{\ell}$.

Rigoureusement, il faudrait vérifier que l'intégrale (8.13) présente bien une divergence nulle. On montre que c'est bien le cas pour une distribution d'extension finie ([7]p.106).

On montre que pour une *distribution finie*, volumique ou surfacique, le potentiel vecteur est défini et continu en tout point. C'est le cas

aussi pour les distributions linéiques, sauf sur la distribution où l'intégrale n'est pas calculable. C'est avec les distributions infinies qu'il faut manipuler l'intégrale avec précaution, car il arrive souvent qu'elle diverge.

Propriétés de symétrie – Comme on peut le voir dans l'expression (8.13), \vec{A} se comporte, du point de vue des symétries, comme un vecteur polaire puisque c'est la somme de vecteurs polaires (\vec{j}). Il vérifiera donc les mêmes propriétés que le champ électrique.

Symétries du potentiel vecteur

- ▶ En tout point d'un plan de symétrie, le potentiel vecteur est contenu dans ce plan.
- ▶ En tout point d'un plan d'anti-symétrie, le potentiel vecteur est perpendiculaire à ce plan.

Méthodes de calcul

Jusqu'ici, pour déterminer le champ magnétique on pouvait procéder :

- ▶ soit à un calcul direct à l'aide de la loi de Biot et Savart;
- ▶ soit à l'application du théorème d'Ampère sur un contour judicieusement choisi, ce qui suppose la présence d'un grand nombre de symétries dans la distribution.

Dorénavant, l'existence du potentiel vecteur \vec{A} nous procure un autre moyen d'accéder au champ magnétique :

- ▶ soit on procède à un calcul directe de \vec{A} via (8.13) pour déduire ensuite $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$;
- ▶ soit on résout l'équation de Poisson (8.12) puis on accède à \vec{B} .

Pour illustrer notre propos, reprenons l'étude du conducteur cylindrique de rayon a transportant un courant uniforme et axial de densité j . Nous avons déjà expliqué comment le théorème d'Ampère permet de déterminer le champ magnétique ici. Tentons d'obtenir le même résultat en passant par le calcul du potentiel vecteur. On a le choix entre un calcul intégral et une équation aux dérivées partielles. Ici l'équation de Poisson est le choix le plus sage, car l'intégrale (8.13) diverge (la distribution est indéfinie).

Avant de commencer, réduisons le problème à l'aide des symétries. On constate que tout plan perpendiculaire à l'axe (Oz) est un plan antisymétrique. Il en résulte que \vec{A} est perpendiculaire à ce plan, c'est-à-dire dirigé suivant l'axe (Oz) :

$$\vec{A} = A_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

La jauge de Coulomb impose $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$; autrement dit le potentiel vecteur ne dépend pas de z . Il ne dépend pas non plus de θ comme on peut le voir à partir de l'expression du champ magnétique. En effet,

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \vec{u}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\theta$$

Remarque : si l'on cherche à déterminer la valeur de \vec{B} en un point particulier M_0 , la méthode qui consiste à passer par \vec{A} est inadaptée, car elle demande de connaître \vec{A} dans la région autour du point M_0 avant d'effectuer les dérivations qui mèneront à la valeur de \vec{B} . Le calcul direct de \vec{B} est dans ce cas beaucoup plus adapté.

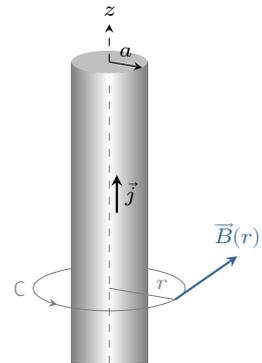


FIG. 8.12 : Fil conducteur rectiligne de section non négligeable.

On peut aussi simplement constater que d'après (8.13), \vec{A} est une somme de vecteurs colinéaires à \vec{u}_z ; le résultat est forcément suivant \vec{u}_z

Rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

et pour des raisons de symétrie, le champ magnétique est orthoradial. Il en découle $\frac{\partial A_z}{\partial \theta} = 0$: le potentiel vecteur ne dépend finalement que de r . Écrivons maintenant l'équation de Poisson :

Expression du laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > a \\ -\mu_0 j & \text{si } r \leq a \end{cases}$$

Intégrons deux fois de suite la première équation ($r > a$). On trouve

$$A_z(r) = C_1 \ln(r) + \mathcal{C}_2 \quad \text{pour } r > a$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration. On ne perd pas en généralité en posant $C_2 = 0$ puisque le champ magnétique n'en dépend pas. Passons à la deuxième relation et multiplions là par r .

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -\mu_0 j r \quad \text{si } r \in]0, a]$$

En intégrant une fois, on obtient

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{1}{2} \mu_0 j r + \frac{C_3}{r}$$

où le dernier terme en C_3/r est forcément nul si l'on veut éviter que le champ magnétique diverge à l'approche de l'axe. En intégrant à nouveau, on aboutit à

$$A_z(r) = -\frac{1}{4} \mu_0 j r^2 + C_4 \quad \text{si } r \leq a$$

Il nous reste à déterminer les deux constantes C_1 et C_4 en utilisant la continuité des champs en $r = a$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \mu_0 j a^2 + C_4 &= C_1 \ln a && \text{continuité de } \vec{A} \\ \frac{1}{2} \mu_0 j a &= -\frac{C_1}{a} && \text{continuité de } \vec{B} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

On en déduit $C_1 = -\frac{1}{2} \mu_0 j a^2$ et $C_4 = \mu_0 j a^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln a \right)$. Le potentiel vecteur est donc donné par

$$A_z^{\text{int}} = -\frac{1}{4} \mu_0 j (r^2 - a^2) - \frac{1}{2} \mu_0 j a^2 \ln a \quad \text{et} \quad A_z^{\text{ext}} = -\frac{1}{2} \mu_0 j a^2 \ln r$$

Le champ magnétique s'obtient sans difficulté :

$$\vec{B} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 j r \vec{u}_\theta & \text{si } r \leq a \\ \frac{1}{2} \mu_0 j \frac{a^2}{r} \vec{u}_\theta & \text{si } r > a \end{cases}$$

On laisse le lecteur vérifier l'adéquation de ce résultat avec celui de la 8.1.

8.4 Relations de passage du champ magnétique

Si les courants sont distribués en surface, le champ magnétique n'est plus défini sur la distribution. Des relations de passage permettent de relier le champ magnétostatique d'un point situé juste en dessous avec celui situé juste au dessus.

Courants surfaciques

Dans certaines situations, les courants qui interviennent sont répartis à l'intérieur d'une mince couche dont il est tentant de négliger l'épaisseur. On décrit alors cette *nappe de courant* par la notion de *densité de courant surfacique*.

Soit dI , l'intensité du courant qui traverse une section rectangulaire ($d\ell \times a$) de la nappe de courant. On a

$$dI = d\ell \int_0^a j(z) dz$$

où la densité volumique de courant j dépend éventuellement de z . Dans une schématisation surfacique, tout se passe comme si l'on faisait tendre $a \rightarrow 0$ et $j \rightarrow \infty$ de façon à ce que l'intégrale reste finie. On écrira alors

$$dI = j_s \times d\ell \quad \heartsuit \quad (8.14)$$

où j_s est par définition la densité de courant surfacique. Cette grandeur s'exprime en A.m^{-1} .

Le **vecteur densité de courant surfacique** \vec{j}_s est simplement un vecteur orienté dans le sens du courant et de norme $j_s = dI/d\ell$.

Exercice – Un cylindre creux de diamètre 10 mm et d'épaisseur négligeable transporte un courant axial et uniforme d'intensité $I = 10 \text{ A}$. Que vaut j_s ?

Rép. $j_s = 318 \text{ A.m}^{-1}$

Les formules intégrales qui donnent l'expression de \vec{B} et \vec{A} sont fournies pour des distributions volumiques. Si une modélisation surfacique se justifie, il suffira alors de remplacer les intégrales triples par des intégrales doubles et le terme $\vec{j} d\tau$ par $\vec{j}_s dS$. Toutefois, le champ magnétique ne sera plus défini en un point de la surface et pourra présenter une discontinuité.

Continuité de la composante normale

On a vu au chapitre précédent que la composante normale du champ électrostatique subit une discontinuité au passage d'une surface chargée. On a obtenu ce résultat en appliquant le théorème de Gauss sur

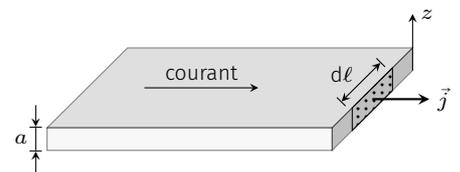


FIG. 8.13 : Nappe de courant.

un petit cylindre coupant perpendiculairement la surface chargée. Le résultat était le suivant

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \iff (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Ici, le champ magnétostatique est à flux conservatif. Il en découle qu'un raisonnement similaire aboutit au résultat suivant :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \iff (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$$

Relation de passage

La composante normale du champ magnétostatique est continue lors de la traversée d'une nappe de courant.

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \tag{8.15}$$

Discontinuité de la composante tangentielle

Le résultat de l'électrostatique concernant la composante tangentielle peut se résumer ainsi :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \iff E_{t2} = E_{t1}$$

Le champ magnétostatique n'étant pas de rotationnel nul, la composante tangentielle doit subir une discontinuité à la traversée d'une nappe de courant.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \iff B_{t2} \neq B_{t1}$$

Procédons de la même manière qu'en électrostatique, en considérant un contour rectangulaire coupant perpendiculairement une surface S transportant un courant de densité \vec{j}_s . Le théorème d'Ampère se

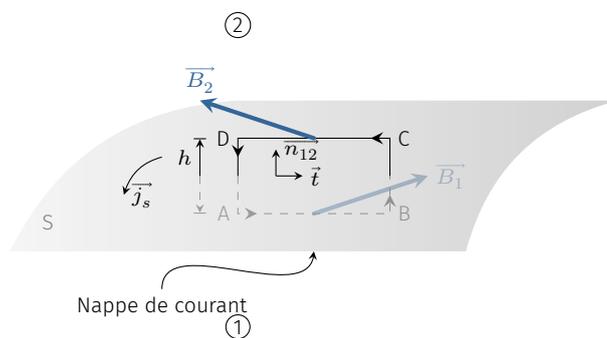


FIG. 8.14 : Contour rectangulaire coupant une nappe de courant.

traduit par

$$\oint_{(ABCD)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{[AB]} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[BC]} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[CD]} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[DA]} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int \vec{j}_s \cdot \vec{n} \, dl$$

Appelons h la largeur du rectangle et ℓ sa longueur. Si l'on fait tendre $h \rightarrow 0$, le deuxième et le quatrième terme disparaissent. Par ailleurs, choisissons ℓ assez petit pour pouvoir considérer le champ magnétique uniforme le long des tronçons rectilignes. On obtient alors l'équation

$$\vec{B}_1 \cdot (\ell \vec{t}) - \vec{B}_2 \cdot (\ell \vec{t}) = \mu_0 \int \vec{j}_s \cdot \vec{n} d\ell$$

où \vec{n} est le vecteur normal à la section rectangulaire défini par $\vec{n} = \vec{t} \wedge \vec{n}_{12}$. Pour les mêmes raisons que précédemment, la densité de courant est uniforme sur la section. On a donc

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{t} - \vec{B}_2 \cdot \vec{t} = \mu_0 \vec{j}_s \cdot \vec{n}$$

La composante tangentielle subit donc une discontinuité. Plaçons le contour de façon à ce que le courant le traverse perpendiculairement. Dans ce cas, \vec{j}_s est colinéaire à \vec{n} et $B_{1t} - B_{2t} = \mu_0 j_s$.

Relation de passage du champs magnétostatique

À la traversée d'une nappe de courant stationnaire, le champ magnétique présente une *continuité* de sa composante normale et une *discontinuité* de sa composante tangentielle que l'on peut résumer par :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}) \quad (8.16)$$

Le solénoïde infini

Réalisons un solénoïde à partir d'une feuille conductrice disposée autour d'un cylindre de rayon a , et parcourue par un courant orthoradial $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_\theta$ uniforme et stationnaire. Cherchons l'expression du champ magnétique créé par cette distribution lorsque le cylindre est infini. Pour cela, nous utiliserons les équations locales associées aux relations de passage.

Tout d'abord, notons (Oz) l'axe de symétrie du cylindre et adoptons le système de coordonnées cylindriques (Fig. 8.15). Tout plan perpendiculaire au cylindre est un plan de symétrie de la distribution de sorte que le champ magnétique est nécessairement axial. De plus, l'invariance de la distribution par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation suivant z implique que l'intensité du champ magnétique varie seulement avec la coordonnée radiale r . Pour résumer,

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$$

Appliquons la relation de Maxwell-Ampère là où le champ magnétique est défini :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \quad \text{pour } r > a \quad \text{ou } r < a$$

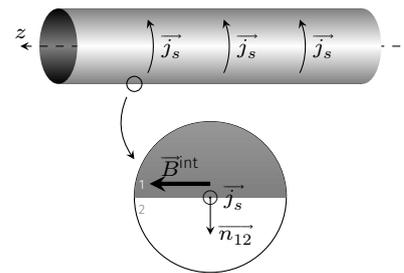


FIG. 8.15 : Solénoïde infini.

ce qui donne

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$$

Le champ magnétique garde donc une valeur constante dans les deux régions définies par $r > a$ et $r < a$. On conçoit que si l'on se place à l'infini et à l'extérieur du solénoïde, le champ est nul¹². On a donc

$$\vec{B}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}^{\text{int}} = C \vec{e}$$

12 : Si cet argument ne vous convainc pas (après tout une nappe de courant infini ne produit pas un champ nul à l'infini), vous pouvez imaginer une bobine torique. Il est alors facile de montrer à l'aide du théorème d'Ampère que le champ magnétique est nul à l'extérieur ceci quel que soit le rayon du tore. Le solénoïde infini pouvant être vu comme une bobine torique de très grand rayon.

13 : On peut remarquer que ce résultat reste encore valide pour un solénoïde de section non circulaire

Les relations de passage permettent de déterminer la valeur du champ intérieur. En effet, au voisinage de la nappe de courant, d'après (8.16), on a

$$\vec{B}^{\text{ext}} - \vec{B}^{\text{int}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} = -\mu_0 j_s \vec{u}_z$$

Finalement, un solénoïde infini produit un champ uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur¹³ :

$$\vec{B}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}^{\text{int}} = \mu_0 j_s \vec{u}_z \quad \heartsuit \quad (8.17)$$

On peut approcher un solénoïde infini en enroulant du fil électrique autour d'un long cylindre. On enroulera de façon jointive les spires pour avoir un courant uniforme, et l'on prendra du fil très fin pour pouvoir négliger l'hélicité de l'enroulement : le courant transporté est alors quasi-orthoradial. On peut relier le courant surfacique avec la densité d'enroulement n (en spires par mètre) et l'intensité I_0 du courant transporté par le fil. En effet, à travers une section de longueur ℓ , passe un courant d'intensité

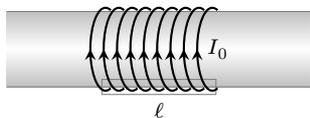


FIG. 8.16 : Enroulement solénoïdal.

$$I = I_0 \times n \times \ell = j_s \ell$$

Cette bobine est donc équivalente à une nappe de courant solénoïdale de densité de courant surfacique $j_s = nI_0$ (A/m). On en déduit le champ créé par une bobine infinie :

$$\vec{B}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}^{\text{int}} = \mu_0 n I_0 \quad \heartsuit \quad (8.18)$$

14 : Pour une démonstration basée sur l'intégration du champ créé par les spires, voir le recueil d'exercices [Électromagnétisme-1ere Partie](#)

On retrouve l'expression vu au [Chapitre 6](#)¹⁴

8.5 Résumé

Récapitulons les connaissances acquises à travers la [TAB. 8.1](#) montrant les similitudes et différences entre les champs électrostatique et magnétostatique.

TAB. 8.1 : Résumé des propriétés des champs électrostatique et magnétostatique.

Propriétés intrinsèques	
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$	$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0$
ou	ou
$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ (Eq. Maxwell-Faraday)	$\text{div} \vec{B} = 0$ (Eq. Maxwell-Thomson)
Lien entre les sources	
$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}$ (Th. de Gauss)	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_e$ (Th. d'Ampère)
ou	ou
$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Eq. Maxwell-Gauss)	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (Eq. Maxwell-Ampère)
$\vec{E}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho(P) \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 PM^2} d\tau$	$\vec{B}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\mu_0 \vec{j}(P) \wedge \vec{u}}{4\pi PM^2} d\tau$
Potentiels	
$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$	$\vec{B}(M) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M)$
$V(M) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 PM} d\tau$	$\vec{A}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\mu_0 \vec{j}(P)}{4\pi PM} d\tau$ (Jauge de Coulomb)
Équations de Poisson	
$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$	$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$ (Jauge de Coulomb)
Relations de Passage	
$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$	$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12})$

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

9

Ce chapitre est consacré à l'étude du mouvement des charges électriques dans un conducteur, éventuellement mobile, en présence d'un champ électromagnétique susceptible de varier dans le temps. L'ensemble des phénomènes électriques qui apparaissent est appelé **induction électromagnétique**.

Nous présenterons d'abord les lois qui découlent des travaux de Faraday et Lenz, puis nous verrons comment la théorie électromagnétique intègre ces phénomènes dans un cadre plus large que celui étudié jusqu'ici.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/induction-electromagnetique.php>

9.1 Approche historique . . .	105
Faits expérimentaux . . .	105
Loi de Lenz-Faraday . . .	106
Loi de modération de Lenz	108
Conversion d'énergie . . .	109
Flux propre	109
9.2 Induction de Lorentz . . .	110
Champ électromoteur . .	110
Généralisation	112
Freinage	113
9.3 Induction de Neumann .	115
Éq. de Maxwell-Faraday .	115
Potentiel (V, A)	116
Chauffage par induction .	117
9.4 Bilan et discussions . . .	118
ARQS	118
Discussion	119

9.1 Approche historique

Faits expérimentaux

Après la découverte d'Ørsted sur la possibilité de produire un champ magnétique à partir de l'électricité, on s'est bien entendu mis à la recherche de la possibilité inverse : produire de l'électricité à partir d'un champ magnétique. Michael Faraday, après de nombreuses tentatives infructueuses, parvint à ses fins en 1831, et découvrit qu'il est possible d'induire un courant électrique dans un conducteur en le soumettant à un flux magnétique *variable*.

Voyons comment se manifeste ce phénomène sur quelques expériences simples.

Expérience n°1 – Formons un circuit électrique avec une spire conductrice et un galvanomètre¹. Approchons le pôle d'un aimant droit. Le galvanomètre nous signale la présence d'un courant électrique, dit **courant induit** tant que l'aimant se déplace. Une fois l'aimant immobilisé, le galvanomètre n'indique aucun courant. Si l'on retire l'aimant



FIG. 9.1 : Mickael Faraday (1791-1867)

1 : Le galvanomètre est un appareil qui permet de mesurer de très faibles courants électriques, typiquement de l'ordre du nA.

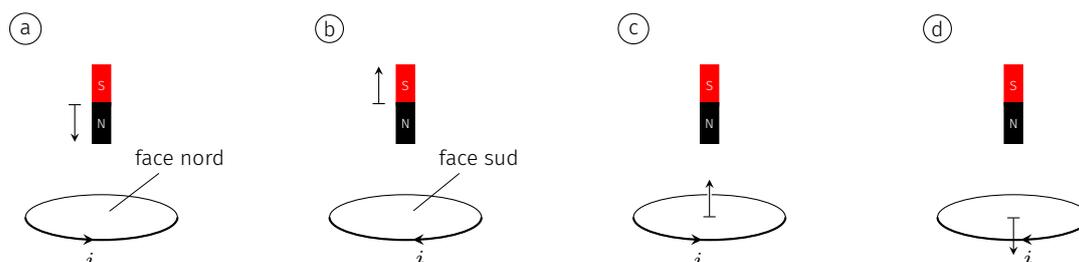


FIG. 9.2 : Expériences 1 et 2 (le galvanomètre n'est pas représenté).

Terminologie – on appelle *inducteur* la source de champ magnétique qui provoque le phénomène d'induction, et l'*induit* le circuit dans lequel apparaît le courant d'induction.

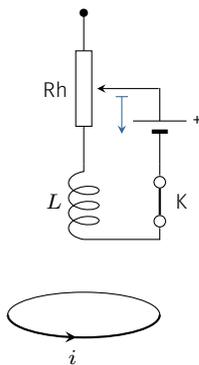


FIG. 9.3 : Un courant induit apparaît dans la spire lorsque l'on ouvre ou ferme l'interrupteur K, ou lorsque l'on déplace le curseur du rhéostat Rh.

dans un mouvement inverse, on observe à nouveau un courant électrique, mais cette fois-ci dans l'autre sens. Si l'on répète l'action plus rapidement, le courant induit par le mouvement est plus intense.

Expérience n°2 – Maintenons l'aimant fixe, puis déplaçons le circuit de sorte que le mouvement relatif soit le même que dans l'expérience précédente. Nous constatons le même phénomène de courants induits.

De ces deux expériences il en résulte que le mouvement relatif d'un inducteur par rapport à un circuit fermé provoque l'apparition d'un courant, dit courant d'induction.

Expérience n°3 – On peut également induire un courant sans qu'il y ait de mouvement relatif entre l'inducteur et l'induit. Par exemple, on peut remplacer l'aimant par une bobine alimentée par une source de tension comme l'illustre la FIG. 9.3. En déplaçant la curseur du rhéostat ou en fermant l'interrupteur, le galvanomètre détecte un courant induit.

Dans ces trois expériences, c'est à chaque fois la *variation du flux magnétique* qui est associée à l'apparition d'un courant induit.

Expérience n°4 – Terminons, en reprenant l'expérience n°1 mais en ouvrant le circuit : aucun courant ne peut circuler dans ce cas. Que se passe-t-il lorsque l'aimant est mis en mouvement ? Un voltmètre branché aux bornes de l'induit affiche une tension à chaque mouvement de l'aimant, et dont la polarité change quand le sens du mouvement change. Autrement dit, le circuit se comporte comme une pile de f.é.m e .

Conclusion

Toute variation de flux magnétique à travers un circuit provoque l'apparition d'une **force électromotrice induite** e . Le circuit est alors équivalent à une source de tension de f.é.m e :

- ▶ s'il est ouvert, la tension à ses bornes vaut e ;
- ▶ s'il est fermé, la f.é.m induite provoque la circulation d'un courant induit.



FIG. 9.4 : Heinrich Lenz (1804-1865)

Loi de Lenz-Faraday

En 1834, Heinrich Lenz présente une formulation mathématique des résultats expérimentaux de Faraday.

Loi de Lenz-Faraday

Toute variation de flux magnétique à travers un circuit C produit l'apparition d'une f.é.m d'induction e donnée par

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad \text{avec} \quad \phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \quad (9.1)$$

où e s'exprime en volts et ϕ_B en webers.

Le flux magnétique à travers un circuit peut varier pour différentes raisons.

- ▶ Le circuit peut se déformer ou se déplacer en présence d'un champ magnétique permanent; on parle alors d'*induction de Lorentz*.
- ▶ L'inducteur peut produire un champ magnétique variable à travers un circuit fixe; auquel cas on parlera d'*induction de Neumann*.

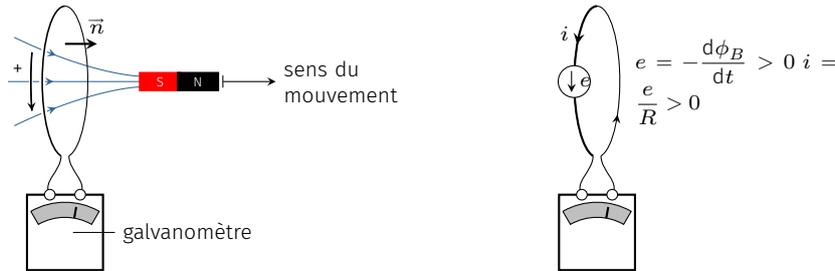


FIG. 9.5 : Orientation de la f.é.m et du courant induit. Ici le flux diminue, ce qui induit un courant circulant dans le sens positif. Une orientation différente du circuit ne changerait pas le sens réel du courant.

Le circuit siège d'un phénomène d'induction est équivalent à une source de tension *polarisée*, insérée dans le circuit. Pour déterminer son orientation, il faut au préalable choisir un sens d'orientation du circuit². **Ce sens positif détermine celui du vecteur normal \vec{n} via la règle du tire-bouchon**, ce qui permet de calculer le flux magnétique. Si $e > 0$, le générateur équivalent produit un courant dans le sens positif (cf. FIG. 9.5). Dans le cas contraire, le courant induit est orienté dans le sens négatif. La valeur de l'intensité est donnée par la loi d'Ohm $e = Ri$ où R est la résistance du circuit fermé.

2 : Ce choix est arbitraire.

Exemple

Une spire en forme de carré d'arête a est entraînée à la vitesse constante \vec{v} en direction de l'axe Ox . Dans l'espace $x > 0$ règne un champ magnétique \vec{B} uniforme perpendiculaire au plan de la spire. Exprimons l'intensité du courant induit en fonction de v, B et R la résistance électrique de la spire.

Commençons par orienter le circuit. Choisissons le sens ABCD. À ce sens de parcours, est associé le vecteur normal \vec{n} opposé au champ magnétique (FIG. 9.7). Appelons $x(t)$ l'abscisse du côté BC de la spire. Le flux magnétique à travers la spire s'écrit

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = - \iint_{\mathcal{D}} B dS = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -Ba x(t) & \text{si } x \in [0, a] \\ -Ba^2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

D'après la loi de Faraday le circuit est équivalent à un générateur de f.é.m

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt} = \begin{cases} Bav & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce générateur en court-circuit induit un courant d'intensité

$$i = \frac{e}{R} = \begin{cases} \frac{Bav}{R} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (9.2)$$

Un courant circule donc dans le sens positif durant l'entrée de la spire

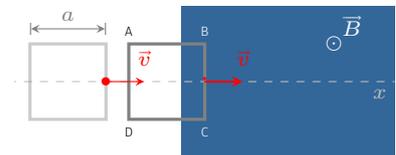


FIG. 9.6 : Cadre en mouvement uniforme dans un champ permanent.

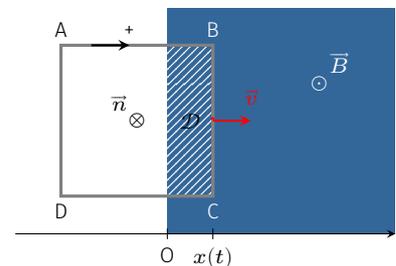


FIG. 9.7 : Choix d'orientations.

dans la zone magnétique.

La loi de Lenz-Faraday ne précise pas quelle surface S choisir dans le calcul du flux magnétique; il suffit d'en choisir une qui s'appuie sur le circuit C . Par conséquent, la loi de Lenz-Faraday suppose implicitement la conservation du flux magnétique.

Loi de modération de Lenz

La présence du signe $-$ dans la loi de Lenz-Faraday a une signification profonde : elle décrit le comportement modérateur du phénomène d'induction et traduit comme nous allons le voir la conservation de l'énergie.

Pour illustrer ceci, reprenons l'exemple précédent. Nous avons montré que durant son entrée dans la zone magnétique, la spire est le siège d'un courant induit $i = Bav/R$. On constate alors deux choses.

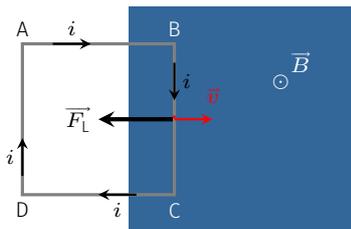


FIG. 9.8 : Freinage électromagnétique.

- ▶ D'une part, ce courant électrique produit lui-même un champ magnétique dont le flux tend à atténuer la variation du flux à l'origine de ce courant. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette propriété est indépendante de la façon d'orienter le circuit.
- ▶ D'autre part, il provoque l'apparition d'une force de Laplace

$$\vec{F}_L = i \overline{BC} \wedge \vec{B} = -\frac{B^2 a^2}{R} \vec{v}$$

qui s'oppose au mouvement en exerçant un effet de freinage visqueux.

Ainsi, les effets électromagnétiques issus de l'apparition du courant induit ont tendance à modérer le phénomène d'induction en freinant la spire et atténuant la variation du flux total. Ces effets modérateurs permettent de prévoir le sens du courant induit et plus généralement la polarité de la f.é.m d'induction.

Loi de modération de Lenz

La polarité de la tension induite est telle que si le courant peut circuler, les effets qu'il génère s'opposent à la cause qui lui a donné naissance.

3 : L'opérateur exerce une force $\vec{F}_{op} = -\vec{F}_L$ si le vecteur vitesse est constant.

Cette loi reflète en réalité la conservation de l'énergie. Pour reprendre, l'exemple précédent, du fait de la force de freinage, l'opérateur doit produire un travail pour maintenir la vitesse de la spire constante. Le travail mécanique à fournir³ vaut

$$W = \int_{x=0}^{x=a} -\vec{F}_L \cdot d\vec{\ell} = \frac{B^2 a^3 v}{R}$$

Pendant le même temps, l'énergie électrique dissipée par effet joule vaut

$$W' = \int_{t=0}^{t=a/v} Ri^2 dt = R \times \left(\frac{Bav}{R} \right)^2 \times \frac{a}{v} = \frac{B^2 a^3 v}{R}$$

Comme on le constate, l'énergie électrique a été apportée par l'opérateur qui a dû pousser le cadre conducteur afin de maintenir sa vitesse constante. La loi de modération est le résultat de cette conversion d'énergie.

« Convert magnetism into electricity »

La découverte de l'induction a joué un rôle majeure dans le développement de l'électricité. On s'est vite rendu compte du potentiel de ce phénomène, notamment en matière de conversion d'énergie. De nos jours, l'un des convertisseurs le plus utilisé est l'*alternateur*. Il convertit l'énergie mécanique d'un *rotor* mis en mouvement (en général l'inducteur) en un courant alternatif au sein d'un *stator* (en général l'induit). On en trouve, dans les centrales électriques, les éoliennes, les voitures etc.

Donnons le principe simplifié d'un alternateur à induit mobile (rotor) : un cadre constitué de N enroulements d'un conducteur est mis en rotation par rapport à un champ magnétique uniforme et permanent. On suppose que le cadre est entraîné à une vitesse angulaire constante ω . Le flux magnétique qui traverse le rotor vaut

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = NS \vec{B} \cdot \vec{n} = NSB \cos(\theta)$$

où S est l'aire du cadre. Le mouvement angulaire est décrit par $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ de sorte que la f.é.m d'induction vaut

$$e(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = NSB\omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

L'induit se comporte comme une source de tension alternative de fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$ et d'amplitude $E = NSB\omega$. On note que plus le rotor tourne vite, plus l'amplitude de la tension est importante. Par exemple, dans un véhicule, l'alternateur étant entraîné par le moteur, on régule la valeur du champ magnétique⁴ de façon à éviter des surtensions qui pourraient endommager la batterie et les autres appareils consommateurs d'électricité.

Dans les centrales industrielles, la tension produite oscille à 50 Hz mais le rotor (l'inducteur) tourne moins vite, car il présente plusieurs paires de pôles magnétiques.

Flux propre et flux extérieur

Dans les exemples précédents, le flux magnétique est déterminé en intégrant uniquement le champ magnétique extérieur \vec{B} . Or, si un courant induit circule, il doit aussi produire un champ magnétique et

Dans son carnet *Notes de chimie, idées, suggestions, et sujets de recherche*, Faraday met cette idée en tête d'une liste consacrée à l'électricité.

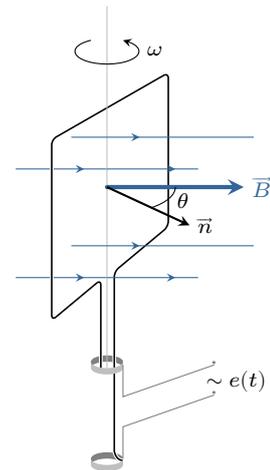


FIG. 9.9 : Schéma de principe d'un alternateur à induit mobile.

4 : Dans les alternateurs des voitures, le champ magnétique est produit par un électroaimant dont on peut piloter l'alimentation à l'aide d'un système de régulation. La tension produite par l'alternateur est bien sûr rendue continue par redressement électronique (ponts de diodes) pour pouvoir alimenter la batterie.

donc un flux magnétique supplémentaire. On appelle ce flux, le **flux propre**. Rigoureusement, on doit écrire

$$\phi_B = \iint_S \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_S \vec{B}_{\text{induit}} \cdot \vec{n} \, dS$$

Dans tout ce chapitre nous négligerons le flux propre devant le flux extérieur par soucis de simplicité. En conséquence, nos résultats ont un domaine de validité restreint.

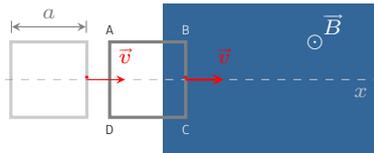


FIG. 9.10 : Cadre en mouvement uniforme dans un champ permanent.

Exemple

Reprenons l'exemple d'une spire entraînée à la vitesse constante \vec{v} entrant dans une zone où règne un champ magnétique \vec{B} uniforme perpendiculaire au plan de la spire. À quelle condition sur la vitesse, notre résultat (9.2) est-il correct ?

Pour cela estimons l'ordre de grandeur du flux propre :

$$\phi_{\text{propre}} \sim B_{\text{induit}} a^2 \sim \frac{\mu_0 i}{a} \times a^2$$

Tant que le flux propre est négligeable, on a $i = Bav/R$ ce qui donne $\phi_{\text{propre}} \sim \mu_0 Ba^2 v/R$. Le flux imposé étant de l'ordre de Ba^2 , le résultat (9.2) est une bonne approximation si

$$\frac{\mu_0 Ba^2 v}{R} \ll Ba^2 \quad \text{soit} \quad v \ll \frac{R}{\mu_0}$$

La solution (9.2) est donc exacte dans la limite $v \rightarrow 0$. Notez que la condition précédente n'est pas très contraignante : si l'on prend $R \sim 1 \, \Omega$ cela donne $v \ll 1 \cdot 10^6 \, \text{m.s}^{-1}$

Nous verrons dans un prochain chapitre que le flux total doit s'écrire

$$\phi_B = \phi_{\text{ext}} + Li$$

où L désigne l'*auto-inductance* du circuit. Dans ce contexte, l'équation électrique prend la forme

$$e(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} - L \frac{di}{dt}$$

Négliger le flux propre revient donc à négliger l'*auto-inductance*.

9.2 Origine de l'induction de Lorentz

Champ électromoteur de Lorentz

Expérience

Une barre conductrice mobile est disposée sur deux rails conducteurs parallèles espacés de ℓ et reliés à un galvanomètre. Le rail et les fils de connexion présentent une résistance négligeable devant celle de la barre conductrice de sorte que la résistance du circuit ne varie pas lorsque la barre se déplace; on la note R .

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique permanent et uni-

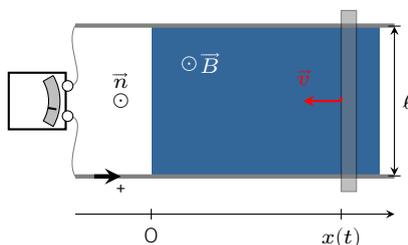


FIG. 9.11 : Expérience vue de dessus.

forme. Entraînons la barre à la vitesse \vec{v} ; le galvanomètre indique alors l'apparition d'un courant induit dans le sens positif (Fig. 9.11).

Que prévoit la loi de Lenz-Faraday? – Compte tenu du choix d'orientation du circuit, le flux magnétique s'écrit⁵

$$\phi_B(t) = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = Blx(t)$$

on en déduit

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt} = Blv \quad \text{avec} \quad v = |\dot{x}| = -\dot{x}$$

Si l'on ferme le circuit, un courant induit d'intensité $i = e/R = Blv/R$ circule dans le sens positif comme observé expérimentalement. On peut vérifier qu'une force de freinage apparaît et que le courant induit tend à atténuer la variation du flux magnétique conformément à la loi de modération de Lenz.

Interprétation dans le référentiel du laboratoire – Considérons les électrons libres de la barre en mouvement. Un observateur dans le référentiel du laboratoire voit ces électrons animés, en moyenne, d'une vitesse \vec{v} en présence d'un champ magnétique \vec{B} . Apparaît alors une force magnétique $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ qui présente une composante non nulle le long de la barre conductrice. Aussi,

- ▶ si le circuit est ouvert (la barre n'est pas posée sur les rails), il y a accumulation de charges \ominus à une extrémité de la barre, et de charges \oplus à l'autre extrémité, d'où l'apparition d'une tension aux extrémités de la barre.
- ▶ si le circuit est fermé, les charges peuvent circuler; un courant induit circule dans le sens positif (les électrons se déplacent dans le sens négatif).

En résumé, le courant induit résulte du déplacement des porteurs de charges libres du conducteur sous l'action de la force de Lorentz. On retrouve qualitativement les conclusions déduites de la loi de Lenz.

Interprétation dans le référentiel lié au conducteur – Dans le cadre de la mécanique newtonienne, la force est un invariant galiléen. C'est pourquoi les porteurs de charge sont aussi soumis à la force $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ dans le référentiel lié à la barre. Cependant, les électrons étant immobiles⁶, cette force ne peut être que de nature électrique. Autrement dit, dans le référentiel lié à la barre, les électrons sont soumis à une force

$$\vec{f} = q\vec{E}_{em} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_{em} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Ce champ de nature électrique dans le référentiel lié à la barre est appelé **champ électromoteur**, car il met en mouvement les porteurs de charge. En circuit ouvert, ce champ électromoteur est responsable de l'accumulation des charges aux extrémités de la barre (cf. Fig. 9.12). Ces charges superficielles créent un champ électrostatique \vec{E} qui neutralise le champ électromoteur de façon à maintenir les électrons au repos :

$$\vec{E} + \vec{E}_{em} = \vec{0}$$

5 : Comme indiqué précédemment, l'auto-induction est négligée dans tout ce chapitre.

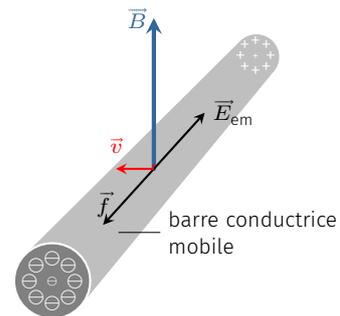


FIG. 9.12 : Accumulation des porteurs de charges aux extrémités de la barre en circuit ouvert.

6 : Rigoureusement, les électrons ne sont pas immobiles si un courant induit circule. Cependant, la force magnétique qui en découle n'ayant pas de composante le long du circuit, elle n'a pas d'effet électromoteur. En fait elle est à l'origine de l'effet Hall (cf. Chapitre 5)

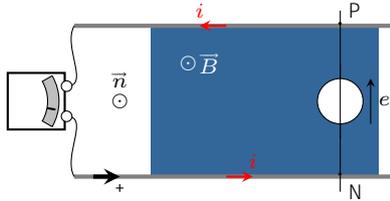


FIG. 9.13 : Le courant circule dans le sens du champ électromoteur.

La barre est donc équivalente à un générateur de tension à vide

$$e = V_{\oplus} - V_{\ominus} = \int_{\oplus}^{\ominus} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\ominus}^{\oplus} \vec{E}_{em} \cdot d\vec{\ell} = vBl$$

On retrouve le même résultat que celui obtenu par la relation de Lenz-Faraday.

Lorsque le circuit est fermé, ce champ électromoteur donne l'énergie nécessaire aux porteurs de charges pour vaincre l'effet du champ électrostatique ainsi que les effets dissipatifs liés à l'effet Joule. La tension aux bornes de la barre vaut alors

$$U_{PN} = e - Ri$$

où R est la résistance de la portion PN de la barre conductrice.

Résumé

Dans le référentiel lié à la barre mobile, les porteurs de charge sont soumis à un champ électrique dont une composante, appelée champ électromoteur de Lorentz et noté \vec{E}_{em} , est responsable de l'apparition de la f.é.m d'induction. On a

$$\vec{E}_{em} = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad e = \oint \vec{E}_{em} \cdot d\vec{\ell}$$

Généralisation

Le résultat précédent se généralise pour tout circuit filiforme en mouvement dans un champ magnétique uniforme.

Considérons un circuit C filiforme fermé de forme quelconque soumis à un mouvement et/ou à une déformation au cours du temps. Notons \vec{v}_p la vitesse de déplacement d'un point P du circuit C. La démonstration repose sur la conservation du flux magnétique

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{ext} d\vec{S} = 0 \tag{9.3}$$

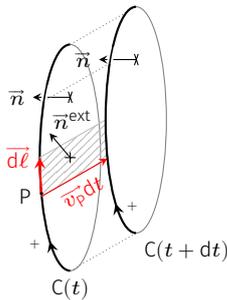


FIG. 9.14 : Le circuit balaye une surface Σ entre t et $t + dt$.

Notons $\phi(t)$ le flux magnétique à travers C à l'instant t et $\phi(t + dt)$ celui à travers le circuit à l'instant $t + dt$. Lors de son déplacement, le circuit balaye une surface latérale Σ , de sorte que la réunion de Σ et de la surface des spires aux deux instants t et $t + dt$ forme une surface fermée. En vertu de (9.3) on a

$$\phi(t) - \phi(t + dt) + \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n}^{ext} dS = 0 \quad \text{avec} \quad \phi(t) = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

où le signe $-$ du deuxième terme provient de la convention d'orientation de \vec{n}^{ext} . Pendant dt , le flux magnétique à travers la spire varie donc de

$$d\phi = \phi(t + dt) - \phi(t) = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n}^{ext} dS$$

Rappelons que la normale \vec{n}^{ext} est toujours dirigée vers l'extérieur de la surface fermée.

Exprimons l'élément de surface latérale en fonction de l'élément de parcours infinitésimal $d\vec{\ell}$ et $\vec{v}_p : \vec{n}^{\text{ext}} dS = \vec{v}_p dt \wedge d\vec{\ell}$. Il en découle,

$$d\phi = \left[\oint_{C(t)} \vec{B} \cdot (\vec{v}_p \wedge d\vec{\ell}) \right] dt = - \left[\oint_{C(t)} d\vec{\ell} \cdot (\vec{v}_p \wedge \vec{B}) \right] dt$$

Rappel de math :
le produit mixte $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ est invariant par permutation circulaire

À retenir

La f.é.m induite par le déplacement d'un circuit dans un champ magnétique permanent \vec{B} s'interprète comme la circulation du champ électromoteur de Lorentz $\vec{E}_{em} = \vec{v}_p \wedge \vec{B}$ le long du circuit.

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \oint_{C(t)} (\vec{v}_p \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{C(t)} \vec{E}_{em} \cdot d\vec{\ell} \quad (9.4)$$

Freinage électromagnétique

Comme on l'a déjà vu, le mouvement d'un circuit dans un champ magnétique fait apparaître des courants induits qui, par leurs effets, s'opposent au mouvement en développant une force de freinage de type visqueux.

Ce phénomène est mis à profit dans les dispositifs de freinage des poids lourds et des autocars. En général, un disque métallique entraîné par les roues passe dans l'entrefer d'un électroaimant fixe. Des courants induits apparaissent alors au sein du conducteur et dissipent une partie de l'énergie mécanique par effet Joule. La force de freinage qui en résulte dépend alors de la distribution de ces courants volumiques, appelés *courants de Foucault*. Celle-ci est assez compliquée à déterminer en général, mais on peut dégager les idées essentielles avec une géométrie simple.

Imaginons une plaque conductrice en translation à la vitesse \vec{v} dans une zone de largeur a où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire à la plaque. Le mouvement de la plaque induit un champ électromoteur

$$\vec{E}_{em} = \vec{v} \wedge \vec{B} = vB \vec{u}_y$$

Ce champ va mettre en mouvement les porteurs de charges dans la zone magnétique. En vertu de la loi d'Ohm, le vecteur densité de courant s'écrit

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}_{em} = \gamma v B \vec{u}_y$$

Rappelons que pour une distribution volumique de courant, la force de Laplace s'écrit

$$\vec{F}_L = \iiint \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$

En intégrant dans le volume où règne le champ magnétique, on obtient

$$\vec{F}_L = -\alpha_0 \vec{v} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = ael\gamma B^2$$

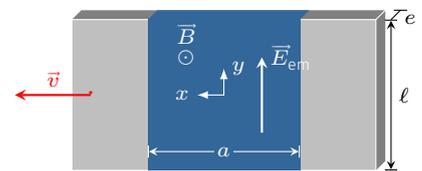


FIG. 9.15 : Plaque conductrice en mouvement dans un champ magnétique uniforme.

La force induite est une force de frottement de type visqueux, et le coefficient de frottement α varie comme le carré du champ magnétique. Dans les poids lourds, le champ magnétique est produit par un électroaimant; dès lors on peut contrôler la puissance du freinage *via* l'alimentation de l'électroaimant. Un tel dispositif présente les avantages suivants :

- ▶ le disque métallique qui subit le freinage ne subit pas d'usure mécanique, contrairement aux dispositifs classiques de freinage qui reposent sur la friction ;
- ▶ si la roue se bloque, la force de freinage disparaît; il n'y a donc aucun risque de dérapage.

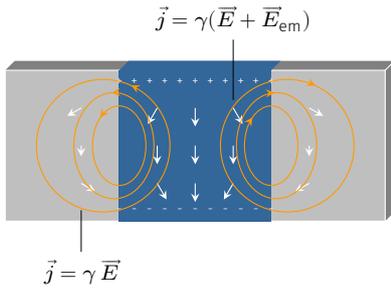


FIG. 9.16 : Allure des courants de Foucault (lignes orange). Les flèches blanche indiquent l'allure du champ électrostatique.

Le lecteur attentif aura sans doute remarqué une certaine incohérence dans le modèle précédent. En effet, le courant induit ne peut pas expulser les charges hors de la plaque conductrice. Par conséquent, on doit observer une accumulation de charges sur les bords de la plaque. Il en résulte l'apparition d'un champ électrostatique \vec{E} qui se superpose au champ électromoteur. On a donc plutôt

$$\vec{j} = \begin{cases} \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{em}) & \text{si } |x| < a/2 \\ \gamma\vec{E} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le champ électromoteur provoque la mise en circulation des courants de Foucault, et les charges statiques les guident *via* le champ électrostatique \vec{E} , de façon à refermer les lignes de courant sur elles-mêmes (FIG. 9.16). On montre que le champ électrostatique peut se mettre sous la forme

$$\vec{E} = vB [f(x, y) \vec{u}_x + g(x, y) \vec{u}_y]$$

La force de Laplace vaut alors

$$\vec{F} = \iiint \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau = \gamma v B^2 \left(\vec{u}_y \iiint f(x, y) d\tau - \vec{u}_x \iiint (1 + g(x, y)) d\tau \right)$$

Dans la configuration symétrique de la FIG. 9.15, on a

$$f(x, y) = -f(x, -y) \quad \text{et} \quad g(x, y) = g(x, -y) < 0$$

Dans ce cas le premier terme disparaît, et il reste

$$\vec{F}_1 = -\alpha \vec{v} \quad \text{avec} \quad \alpha = \alpha_0 \langle 1 + g(x, y) \rangle < \alpha_0$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne calculée dans le volume où règne le champ magnétique. Finalement, le coefficient de frottement fluide est inférieur à celui obtenu en négligeant l'accumulation des charges qui assurent la fermeture des lignes de courant. De ce point de vue on peut dire que le champ électrostatique joue un rôle contre-électromoteur.

En pratique le champ magnétique est localisé et non uniforme. Dans ce cas, en plus des charges superficielles, des charges volumiques de guidage apparaissent là où le champ magnétique décroît rapidement. De manière générale, le coefficient de frottement dépend du profil du champ magnétique et de la géométrie du conducteur *via* les effets de bords[8]. On a toujours $\alpha \leq \alpha_0/2$ où α_0 est le coeffi-

[8] : DEIBER et al. (2007), « Freinage par courants de foucault (II) : Des charges réparties en volume guident les courants induits »

cient de frottement obtenu en tenant compte uniquement du champ électromoteur.

9.3 Induction de Neumann

On peut aussi induire un courant en soumettant un circuit fixe à un champ magnétique variable dans le temps. Quelle est l'origine du champ électromoteur dans ce cas ?

Équation de Maxwell-Faraday

Les expériences de Faraday ont montré que le courant induit était lié à la variation du flux magnétique à travers l'induit, peu importe l'origine des causes responsables de la variation du flux. Ici le flux magnétique varie car le champ magnétique dépend explicitement du temps. Notons $\vec{B}(M, t)$ le champ magnétique qui règne en un point quelconque M de l'espace, et à l'instant t . Le courant électrique est lié à l'existence d'un champ électrique dont une composante présente un caractère électromoteur. La f.é.m induite doit s'écrire

$$e = \oint_C \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}(M, t) \cdot \vec{n} \, dS \quad (9.5)$$

Notez que P parcourt le circuit dans le sens positif alors que M parcourt une surface S qui s'appuie sur C .

Le théorème de Stokes indique que

$$\oint_C \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{E}(M, t) \cdot \vec{n} \, dS$$

Par conséquent,

$$e = \iint_S \text{rot} \vec{E}(M, t) \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t) \cdot \vec{n} \, dS$$

Équation qui, pour être valable quelle que soit la surface S choisie, implique la relation locale suivante :

Relation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.6)$$

La relation de Maxwell-Faraday est un énoncé complètement équivalent à la relation (9.5). Elle constitue l'une des 4 équations locales de Maxwell. Insistons sur le fait que cette dernière relation s'applique qu'il y ait ou non un circuit conducteur. **Toute variation temporelle d'un champ magnétique induit au même endroit un champ électrique qui a la particularité de ne pas être conservatif.**

Notez qu'en régime stationnaire, on retrouve la relation $\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0}$.

Potentiel électromagnétique

Comme on l'a déjà signalé, la notion de flux magnétique « à travers un circuit » n'a de sens que si le champ magnétique reste à flux conservatif. C'est pourquoi, on étend la conservation du flux magnétique, aux régimes variables.

$$\text{div } \vec{B}(M, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(M, t) = 0 \quad \heartsuit \quad (9.7)$$

Il en résulte que le champ magnétique dérive d'un **potentiel vecteur** $\vec{A}(M, t)$ fonction de l'espace et du temps :

$$\vec{B}(M, t) = \text{rot } \vec{A}(M, t) \quad \heartsuit \quad (9.8)$$

Si l'on injecte cette dernière relation dans l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \text{rot } \vec{A}}{\partial t} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{soit} \quad \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Autrement dit, le champ $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$ est un gradient. On pose alors

$$\vec{E}(M, t) = -\text{grad} V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \heartsuit \quad (9.9)$$

7 : On dit aussi *potentiel scalaire*.

où $V(M, t)$ désigne le **potentiel électrique**⁷. En régime variable, le champ électrique présente une composante non conservative, appelé champ électromoteur de Neumann : $\vec{E}_{em} = -\partial \vec{A} / \partial t$.

De la même manière que l'ensemble $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ constitue le **champ électromagnétique**, l'ensemble $\{V, \vec{A}\}$ constitue le **potentiel électromagnétique**.

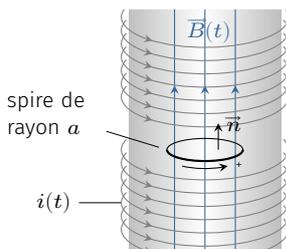


FIG. 9.17 : Spire conductrice en présence d'un champ magnétique axial et variable.

8 : On peut utiliser les lois de la magnétostatique si le courant ne varie pas trop vite; c'est l'approximation des régimes quasi stationnaires (cf. partie 9.4).

Exemple de calcul

Considérons une spire de rayon a d'axe (Oz) . Plaçons cette spire dans un champ magnétique uniforme et axial, mais variable dans le temps

$$\vec{B} = B(t) \vec{u}_z$$

On peut penser au champ magnétique produit par un solénoïde quasi-infini, de densité d'enroulement n , alimenté par un courant d'intensité variable $i(t)$; on a dans ce cas⁸ $B(t) = \mu_0 n i(t)$.

Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan d'antisymétrie; par conséquent le potentiel vecteur est orthoradial. Vu l'invariance par rotation et translation, on peut écrire $\vec{A} = A(r) \vec{u}_\theta$. Une des méthodes permettant de trouver l'expression de $A(r)$ consiste à calculer le flux magnétique à travers une ligne de champ du potentiel vecteur, à savoir un cercle de rayon r . D'une part, on a

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = B(t) \pi r^2$$

D'autre part,

$$\phi_B = \iint \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r A(r)$$

Il découle $\vec{A} = \frac{1}{2}rB(t)\vec{u}_\theta$. Vérifions que son rotationnel donne bien le champ magnétique :

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix} = \vec{B}$$

Poursuivons en déterminant le champ électromoteur :

$$\vec{E}_{\text{em}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{2}r \frac{dB(t)}{dt} \vec{u}_\theta$$

Ce champ induit dans la spire un courant d'intensité algébrique

$$i = \frac{1}{R} \oint_{r=a} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\pi a^2}{R} \frac{dB(t)}{dt}$$

où R est la résistance de la spire et où l'auto-induction a été négligée.

Chauffage par induction

Comme nous venons de le voir dans l'exemple précédent, un champ magnétique axial et variable dans le temps induit un courant lui même variable dans une spire perpendiculaire au champ magnétique. Si l'on remplace la spire par un barreau conducteur, des courants de Foucault vont se développer au sein du matériau, et dissiper l'énergie électrique par effet Joule. C'est le principe du *chauffage par induction* qui a une grande importance, tant industrielle (fusion, soudure sans défaut) que domestique (cuisson sur plaque à induction).

Cherchons à déterminer la distribution de ces courants ainsi que la puissance dissipée par effet Joule en supposant que :

1. le champ magnétique est uniforme et alternatif. On note ω sa pulsation et B_0 son amplitude : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$.
2. Le barreau métallique est un cylindre d'axe (Oz), de rayon a , de hauteur h et de conductivité électrique γ .
3. L'auto-induction est négligée.

D'après l'exemple précédent, le champ électromoteur induit s'écrit

$$\vec{E}(r, t) = -\frac{1}{2}r \frac{dB(t)}{dt} \vec{u}_\theta = \frac{1}{2}B_0\omega \sin(\omega t) r \vec{u}_\theta$$

En vertu de la loi d'Ohm, les courants de Foucault se distribuent suivant une densité

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{2}\gamma B_0\omega \sin(\omega t) r \vec{u}_\theta$$

On constate que les courants de Foucault ne sont pas répartis uniformément dans le cylindre. Par ailleurs, plus la fréquence est élevée, plus ces courants sont intenses.

Calculons maintenant la puissance dissipée par effet Joule. Notons ρ_e la densité des électrons libres. Chaque élément de volume $d\tau$

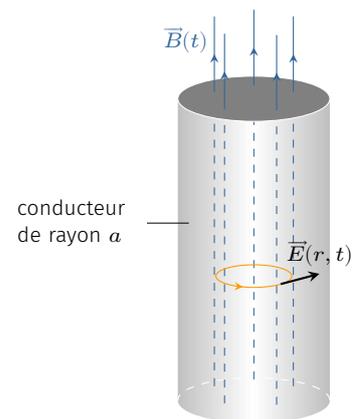


FIG. 9.18 : Barreau cylindrique conducteur, siège de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.

contient $\rho_e d\tau$ porteurs de charge et subit la force électrique $d\vec{F} = \rho_e d\tau \vec{E}$. Celle-ci développe une puissance

$$d\mathcal{P} = \rho_e d\tau \vec{E} \cdot \vec{v}_e = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

où l'on a fait intervenir \vec{v}_e la vitesse moyenne des électrons libres. Finalement, la puissance fournie au cylindre conducteur s'écrit

$$\mathcal{P} = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \iiint \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)}{4} r^2 d\tau$$

Après intégration sur le volume cylindrique, on trouve

$$\mathcal{P} = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)}{4} \underbrace{\iiint r^3 dr d\theta dz}_{\pi a^4 h/2} = \frac{\pi \gamma \omega^2 B_0^2 a^4 h}{8} \sin^2(\omega t)$$

En moyenne, la puissance dissipée par unité de volume ($W \cdot m^{-3}$) vaut

$$\frac{\bar{\mathcal{P}}}{\mathcal{V}} = \frac{\gamma \omega^2 B_0^2 a^2}{16}$$

La densité de puissance moyenne croît linéairement avec la surface du cylindre, le carré du champ magnétique et la fréquence. Ce dernier point est cependant à nuancer car nous avons négligé l'auto-induction, ce qui restreint le domaine de validité de la relation obtenue. Nos résultats supposent en effet que le champ imposé est bien supérieur au champ magnétique induit. On peut estimer ce dernier à partir de l'expression de \vec{j} : on trouve⁹ $B_{\text{induit}} \sim \mu_0 \gamma a^2 \omega B_0 / 4$. Nos résultats sont donc valides tant que

$$\frac{\mu_0 \gamma a^2 \omega B_0}{4} \ll B_0 \quad \text{soit} \quad \omega \ll \frac{4}{\mu_0 \gamma a^2}$$

Par exemple, pour un cylindre d'aluminium de rayon $a = 1 \text{ cm}$ et de conductivité $\gamma = 38 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, cela donne une fréquence $\nu \ll 800 \text{ Hz}$. Au delà, la puissance dissipée croît plutôt en $\sqrt{\omega}$. Pour un traitement complet du problème, voir [9].

9 : Le théorème d'ampère donne $\text{rot } \vec{B}_{\text{induit}} = \mu_0 \vec{j}$. Si l'on néglige les effets de bords, \vec{B}_{induit} est axial et ne dépend que de r . On a alors $\text{rot } \vec{B}_{\text{induit}} = -dB_{\text{induit}}/dr \vec{u}_\theta$. En remplaçant \vec{j} par son expression, on aboutit à

$$B_{\text{induit}} = \frac{\mu_0 \gamma \omega B_0}{4} (a^2 - r^2) \sin(\omega t)$$

Le champ induit est maximum au centre.

[9] : ROUSSEL et al. (2011), « Courants de Foucault induits dans un cylindre conducteur - Approche numérique »

9.4 Bilan et discussions

Équations de Maxwell dans l'ARQS

Résumons ce que l'on a appris dans ce chapitre : les phénomènes d'induction font apparaître un lien entre phénomène électrique et variation de flux, ce qui oblige à admettre l'existence d'un couplage entre champ électrique et magnétique. Les équations locales qui décrivent bien les phénomènes d'induction se résument à :

Relation avec les sources $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	Structure du champ $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{div } \vec{B} = 0$	♡ (9.10)
--	--	----------

où la relation en gras traduit le couplage électromagnétique. Ces équations forment les équations de Maxwell dans un cadre approché que l'on appelle *Approximation des Régimes Quasi Stationnaires*¹⁰. Nous verrons au **Chapitre 10** que cette approximation revient à négliger les retards de propagation de l'interaction électromagnétique. Pour un circuit de dimension caractéristique L , soumis à des grandeurs électromagnétiques variables de temps caractéristique T , le retard de propagation est effectivement négligeable si

$$cT \ll L \quad \text{soit en terme de fréquence} \quad \nu \ll \frac{c}{L}$$

Pour $L \sim 1$ m, cela donne $\nu \ll 300$ MHz. Cette gamme de fréquence définit le *domaine de l'électrocinétique*. Dans ce cadre, le courant électrique est à flux conservatif. En effet, puisque la divergence d'un rotationnel est nul, on a

$$\text{div}(\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \text{div} \vec{j}(M, t) = 0$$

Par conséquent, à un instant t , le long d'une branche d'un circuit, l'intensité électrique conserve la même valeur. Par ailleurs, si on calcule le flux de \vec{j} à travers une surface fermée qui englobe un nœud, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n \text{ branches}} i_k(t) = 0$$

où i_k est l'intensité algébrique du courant de la k^{e} branche; on retrouve la *loi des nœuds*.

Enfin, la loi d'Ohm des conducteurs est aussi valide en régime quasi-stationnaire :

$$\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}'(M, t)$$

où \vec{E}' est le champ électrique dans le référentiel du conducteur.

Discussion autour de la loi de Faraday

Jusqu'ici, nous avons distingué le cas où le circuit est en mouvement dans un champ magnétique stationnaire du cas où le circuit est fixe dans un champ électromagnétique dépendant du temps. Mais que se passe-t-il lorsque un circuit est mobile dans un champ électromagnétique variable? La loi de Faraday est-elle toujours valide?

Dans le cas général, la f.é.m d'induction s'obtient toujours par le calcul de la circulation le long du circuit C du champ électrique¹¹ :

$$e(t) = \oint_{P \in C} \vec{E}'(P, t) \cdot d\vec{\ell}$$

où \vec{E}' est le champ électrique dans le référentiel lié à la portion P du circuit C . Dans le cadre de l'électromagnétisme classique¹², \vec{E}' est lié au champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ du laboratoire via

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_p \wedge \vec{B} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

10 : ARQS en abrégé.

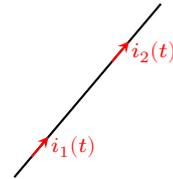


FIG. 9.19 : Dans l'ARQS, $i_1(t) = i_2(t)$.

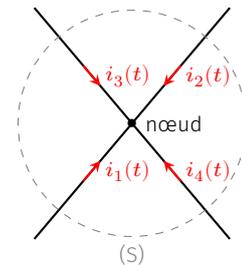


FIG. 9.20 : Dans l'ARQS, $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0$.

11 : En réalité, seule sa composante électromotrice intervient puisque sa composante électrostatique $-\text{grad}V$ est à circulation nulle sur un circuit fermé.

12 : On suppose que la vitesse de déplacement du circuit par rapport au référentiel galiléen du laboratoire est non relativiste.

ce qui donne la formule générale

$$e(t) = \underbrace{\oint -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\mathbf{P}, t) \cdot d\vec{\ell}}_{\text{Neumann}} + \underbrace{\oint \vec{v}_p \wedge \vec{B}(\mathbf{P}, t) \cdot d\vec{\ell}}_{\text{Lorentz}} \quad \heartsuit \quad (9.11)$$

Le premier terme traduit la variation du flux suite à la variation du champ magnétique quand le second terme correspond à la variation du flux suite au déplacement du circuit. Finalement, on peut écrire

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

13 : Certains auteurs comme Richard Feynman préfèrent parler de *règle du flux* pour cette raison.

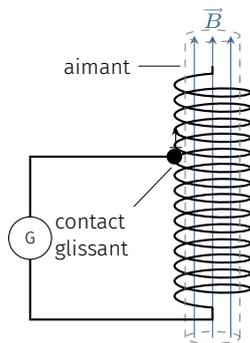


FIG. 9.21 : Un exemple de circuit soumis à une variation de flux et pourtant siège d'aucun phénomène d'induction.

à condition de tenir compte de toutes les causes de variation du flux. Toutefois, la « loi de Lenz-Faraday » souffre de quelques exceptions¹³. Dans le circuit de la Fig. 9.21, un contact glisse sur un bobinage que l'on a enroulé autour d'un aimant. Lorsque le curseur se déplace, le nombre de spires du circuit fermé varie de sorte que le flux magnétique à travers le circuit varie. Pourtant, aucun phénomène d'induction n'est observé. En effet, si l'on utilise la relation (9.11) on trouve $e = 0$, car :

- ▶ d'une part, le potentiel vecteur est indépendant du temps;
- ▶ d'autre part, le champ électromoteur de Lorentz est quasi nul. En effet $B \simeq 0$ à l'extérieur de l'aimant. Même si on tient compte du champ résiduel extérieur, ce dernier étant dans le plan du circuit, \vec{E}_{em} est nécessairement perpendiculaire à la partie mobile, de sorte que sa circulation ne peut que donner zéro.

La formule de Lenz-Faraday est donc à manier avec précaution. Cette formule suppose en fait une variation *continue* des paramètres qui définissent la configuration du circuit. L'exemple ci-dessus ne respecte pas cette condition, car la surface enfermée par le circuit varie de façon discontinue à chaque fois que le curseur entre en contact avec une spire au cours de son déplacement.

En 1865, le physicien écossais James Clerk Maxwell publie *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, article dans lequel il unifie les théories électrique et magnétique en une seule, et établit 20 équations différentielles qui décrivent le comportement local du champ électromagnétique. C'est Oliver Heaviside qui les réduira à 4; les 4 *équations de Maxwell* qui, associées à la force de Lorentz, forment la *théorie électromagnétique classique*.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/equations-de-maxwell.php>

- 10.1 Lois générales 121
 - Champ électromagnétique 121
 - Équation de continuité 122
 - Il manque quelque chose 122
 - Courant de déplacement 123
 - Bilan 124
- 10.2 Leur résolution 125
 - Propriétés 125
 - Introduction des potentiels 125
 - Jauge de Lorenz 126
 - ARQS 128

10.1 Lois générales de l'électromagnétisme

Concept de champ électromagnétique

Nous avons vu lors de l'étude des phénomènes électriques et magnétiques en régime stationnaire, qu'on pouvait les interpréter en faisant intervenir deux champs indépendants : les charges électriques produisent dans tout l'espace un champ électrique $\vec{E}(M)$ donné par la loi de Coulomb, et les courants électriques un champ magnétique $\vec{B}(M)$ obtenu par la loi de Biot et Savart.

Les phénomènes d'induction sont venus troubler ce découplage apparent entre magnétisme et électricité. Lorsque les charges et/ou les courants évoluent au cours du temps cela produit à la fois un champ électrique et magnétique sans qu'il soit possible de relier le champ électrique uniquement à la charge électrique, ni le champ magnétique uniquement au courant électrique. Ainsi, on admet que l'objet physique pertinent pour décrire ces phénomènes, est le **champ électromagnétique** $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ qui forme un tout indissociable. Il s'agit donc d'un objet mathématique constitué de 6 champs scalaires¹. Le champ électromagnétique est accessible à l'expérience par l'intermédiaire de la **formule de Lorentz** qui donne la force subie par une particule de charge q et de vitesse \vec{v} dans un référentiel donné :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \heartsuit \quad (10.1)$$

L'objet de ce chapitre est de déterminer les lois qui relient une distribution de charges et courants modélisée par les densités (ρ, \vec{j}) , au champ électromagnétique $\{\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)\}$.



FIG. 10.1 : James Clerk Maxwell (1831-1879) - © George J. Stodart, Public domain, via Wikimedia Commons

1 : On choisit de représenter ce champ par un ensemble de deux vecteurs de \mathbb{R}^3 mais on pourrait tout aussi bien décrire ce champ par un tenseur symétrique 4×4 .

Équation de continuité

Toute distribution de charges doit obéir à un principe qui dépasse le cadre de l'électromagnétisme : la *loi de conservation de la charge*. Celle-ci se traduit par une équation locale qui relie densité volumique de charge et densité volumique de courant.

Imaginons un volume V fixe dans le référentiel d'étude, contenant une charge totale $q(t)$. Ce volume est délimité par une surface fermée S . Si l'on caractérise la distribution des charges par sa densité volumique $\rho(M, t)$ et son courant $\vec{j}(M, t)$, on a

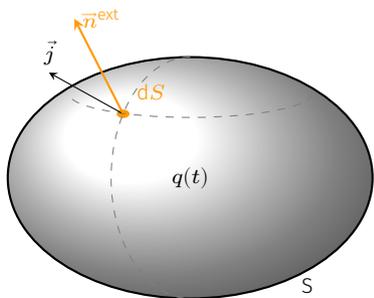


FIG. 10.2 : Volume V chargé, délimité par une surface fermée S .

$$q(t) = \iiint_V \rho(M, t) d\tau \quad \text{et} \quad i_{\text{sortant}} = \oiint_S \vec{j}(M, t) \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS$$

où i_{sortant} est l'intensité du courant électrique sortant du volume à l'instant t .

Le principe de conservation de la charge se traduit par le fait que si $q(t)$ varie au cours du temps, c'est que le volume V a échangé des charges avec l'extérieur sous forme de courants :

Notez que l'on doit prendre la dérivée partielle par rapport au temps car ρ est une fonction du temps et de la position.

$$i_{\text{sortant}} = -\frac{dq(t)}{dt} \quad \text{soit} \quad \oiint_S \vec{j}(M, t) \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = -\iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau$$

Le premier terme peut être transformé à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_V \text{div} \vec{j}(M, t) d\tau = -\iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau$$

L'égalité devant être vérifiée quel que soit le volume V choisi, il en découle la relation

$$\text{div} \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0 \quad \heartsuit \quad (10.2)$$

Cette équation est appelée **équation de continuité** ou **équation de conservation de la charge**.

En régime stationnaire, densité et courant sont indépendants du temps : on retrouve alors la relation déjà rencontrée $\text{div} \vec{j}(M) = 0$ qui exprime le fait que le courant électrique est à flux conservatif.

Il manque quelque chose

2 : On parle ici de l'électrostatique, la magnétostatique et l'induction électromagnétique.

Les phénomènes électromagnétiques étudiés jusqu'ici² sont bien décrits par les équations résumées ici :

Relation avec les sources $\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$	Structure du champ $\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$
---	---

Montrons sur un exemple classique d'électrocinétique que nos équations ne forment pas un cadre cohérent.

Imaginons la situation d'un condensateur initialement chargé se déchargeant dans une résistance. Lors de la décharge, un courant électrique circule dans le circuit produisant ainsi un champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ autour des fils de connexion. Considérons un cercle C entourant le circuit comme indiqué sur la Fig. 10.3, puis calculons la circulation du champ magnétique le long de C à l'aide du théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 i(t) \quad (10.3)$$

où le flux de \vec{j} a été calculé à travers le disque entouré par C . On retrouve bien entendu le théorème d'Ampère.

Cependant, rien nous oblige à choisir le disque comme surface d'intégration. Toute surface convient tant qu'elle s'appuie sur le contour C . Prenons donc la surface S' qui passe entre les armatures du condensateur. Dans ce cas, aucun courant ne traverse S' et l'on a

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S'} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

en contradiction avec la relation précédente.

C'est en résolvant cette contradiction que Maxwell trouva un cadre cohérent pour unifier les effets électromagnétiques.

Courant de déplacement

Dans le calcul précédent on se rend bien compte que le long de la surface S' le vecteur $\text{rot} \vec{B}$ doit présenter par endroit une valeur non nulle. Il faut donc modifier la relation d'Ampère. Pour cela, écrivons

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_d)$$

où \vec{j}_d est un terme supplémentaire homogène à une densité volumique de courant. Ce terme est appelé **courant de déplacement**. Cherchons l'expression qu'il faut lui donner. Pour cela, exprimons $\text{div} \vec{j}$:

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} - \vec{j}_d \quad \text{d'où} \quad \text{div} \vec{j} = \text{div} \left[\frac{\text{rot}(\vec{B}/\mu_0) - \vec{j}_d}{1} \right] = -\text{div} \vec{j}_d$$

Or, la conservation de la charge impose $\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ce qui implique

$$\text{div} \vec{j}_d = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Si l'on considère que la relation de Maxwell-Gauss reste valide en régime variable, alors $\rho = \epsilon_0 \text{div} \vec{E}$, et on aboutit à la relation

$$\text{div} \vec{j}_d = \text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

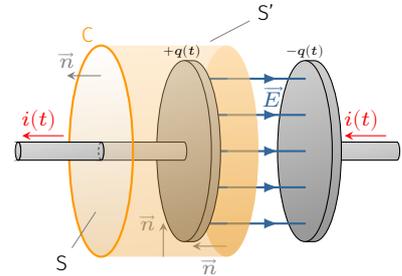


FIG. 10.3 : Condensateur se déchargeant. Ici q décroît au cours du temps.

On peut intervertir les dérivées temporelles et spatiales en vertu du théorème de Schwarz.

Dans ses publications de 1865 Maxwell propose d'adopter la solution particulière la plus simple, à savoir

$$\vec{j}_d \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad [\text{A.m}^{-2}] \quad \heartsuit \quad (10.4)$$

Ce choix s'est avéré justifié par les conséquences vérifiables expérimentalement.

Exemple

Reprenons l'exemple de la FIG. 10.3. Si l'on adopte l'approximation du condensateur plan, on a, en notant σ la densité surfacique de charge :

$$\vec{E} = \begin{cases} -\sigma/\epsilon_0 \vec{n} & \text{à l'intérieur} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

Par conséquent, lorsque le condensateur se décharge, il apparaît entre les armatures un courant de déplacement donné par

$$\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \vec{n} & \text{à l'intérieur} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

Reprenons le calcul de la circulation du champ magnétique en faisant intervenir le flux de $\text{rot } \vec{B}$ à travers la surface S' :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S'} \mu_0 \vec{j}_d \cdot \vec{n} \, dS = -\mu_0 \frac{d(\sigma S_0)}{dt}$$

$q(t)$ décroissant, on a $i = -\frac{dq}{dt}$.

où S_0 est la surface d'une armature. Sachant que $\sigma S_0 = q(t)$, on retrouve le résultat (10.3).

Bilan

En résumé, les phénomènes électromagnétiques sont correctement décrits si l'on admet l'existence d'un champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ accessible expérimentalement *via* la force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

et dont les propriétés locales sont données par les 4 *équations de Maxwell* :

Équations de Maxwell

Relation avec les sources		Structure du champ	
Maxwell-Gauss	$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Maxwell-Faraday
Maxwell-Ampère	$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\text{div} \vec{B} = 0$	Maxwell-Thomson

On distingue deux relations qui relient les champs aux sources (courant et densité de charge). La première traduit le théorème de Gauss qui découle comme on l'a vu de la loi de Coulomb et que l'on étend

aux régimes variables. La seconde traduit le théorème d'Ampère modifié par la prise en compte du courant de déplacement pour assurer la conservation de la charge. Les deux autres relations traduisent les propriétés intrinsèques du champ électromagnétique indépendamment des sources. La relation de Maxwell-Faraday indique que toute variation temporelle du champ magnétique induit un champ électrique (phénomène d'induction), et la dernière postule que le champ magnétique est à flux conservatif.

Notez que le principe de conservation de la charge est implicitement inclus dans les équations de Maxwell.

Enfin, ces équations de Maxwell sont valables dans *tout* référentiel galiléen³.

3 : Comme on le sait, le référentiel terrestre n'est pas strictement galiléen du fait de sa rotation propre. Toutefois, l'influence de cette dernière sur les phénomènes électromagnétiques est tout à fait négligeable.

10.2 Résolution des équations de Maxwell

Propriétés

Les équations de Maxwell constituent un système couplé aux dérivées partielles du premier ordre, dont la solution est le champ électromagnétique. Donnons quelques propriétés de ce champ.

Continuité du champ – Si les sources sont décrites par une description volumique⁴, le champ électromagnétique est continu.

Discontinuité du champ – Il arrive que l'on soit amené à idéaliser une situation physique en décrivant un ensemble de charges ou de courants comme s'ils étaient distribués le long d'une surface. Ce type de simplifications conduit à des discontinuités du champ de part et d'autre de la surface. On retrouve les mêmes propriétés que celles déjà vues au [Chapitre 8](#) et [Chapitre 7](#) dans le cadre des régimes stationnaires. Nous les résumons ici :

4 : On caractérise la source par une densité volumique de charge locale $\rho(M, t)$ et un courant volumique local $\vec{j}(M, t)$.

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}) \quad \heartsuit \quad (10.5)$$

Principe de superposition – Les équations de Maxwell ont le bon goût d'être linéaires par rapport aux champs et aux sources. Il en découle le principe de superposition suivant : Si une distribution \mathcal{D}_1 crée en M et à l'instant t un champ électromagnétique $\{\vec{E}_1, \vec{B}_1\}$, et qu'une autre distribution crée le champ $\{\vec{E}_2, \vec{B}_2\}$, alors les deux distributions agissant simultanément créeront le champ électromagnétique $\{\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{B}_1 + \vec{B}_2\}$.

Introduction des potentiels

Les équations de Maxwell forment un système d'équations aux dérivées partielles qui ne permet pas, en général, d'explicitement séparément les champs \vec{E} et \vec{B} en fonction des densités ρ et \vec{j} . En revanche, l'introduction des potentiels dont dérivent les champs \vec{E} et \vec{B} va nous permettre de découpler le problème. On est ainsi capable d'exprimer le potentiel V en fonction de ρ et le potentiel vecteur \vec{A} en fonction

de \vec{j} . Le champ électromagnétique s'en déduit par simple dérivation. Cherchons donc à déterminer les équations vérifiées par les potentiels.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la conservation du flux magnétique $\text{div} \vec{B} = 0$ implique que \vec{B} est un champ rotationnel :

$$\vec{B}(M, t) \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M, t) \quad \heartsuit \quad (10.6)$$

En réinjectant dans l'équation de Maxwell-Faraday, on trouve

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Ce qui signifie que le champ à l'intérieur de l'opérateur rotationnel est un gradient. On pose alors

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{soit} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t} \quad \heartsuit \quad (10.7)$$

Le potentiel électromagnétique $\{V, \vec{A}\}$ est donc un intermédiaire de calcul qui permet de déduire le champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$.

Utilisons maintenant les deux autres équations de Maxwell en utilisant les potentiels :

$$\text{div} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Maxwell-Gauss}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{grad}} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad \text{Maxwell-Ampère}$$

En utilisant les identités $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \Delta f$ et $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$, on aboutit à

$$\Delta V + \frac{\partial \text{div} \vec{A}}{\partial t} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (10.8)$$

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \quad (10.9)$$

Finalement on aboutit à 4 équations aux dérivées partielles couplées et du second ordre. Voyons maintenant comment découpler ces équations.

Jauge de Lorenz

Rappelons que les définitions (10.6) et (10.7) ne définissent pas de manière univoque les potentiels. En effet, les transformations

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f \quad \text{et} \quad V \rightarrow V - \frac{\partial f}{\partial t}$$

laissent invariantes les relations

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On peut profiter de cette indétermination pour imposer une condition supplémentaire qui serait choisie en fonction des simplifications qu'elle apporte. Cette contrainte arbitraire est dite *condition de jauge*.

La **jauge de Lorenz** est une jauge particulière donnée par :

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \quad \heartsuit \quad (10.10)$$

Exercice – Montrer que c est homogène à une vitesse (nous verrons qu'il s'agit de la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide).

Cette contrainte permet de simplifier grandement les équations (10.8) et (10.9) qui deviennent alors :

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (10.11)$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \quad (10.12)$$

Ainsi, on obtient deux équations *découplés*, qui relient le potentiel scalaire à la densité de charge, et le potentiel vecteur au courant. Les solutions ont été introduites par Lorenz et sont appelées potentiels retardés.

Potentiels retardés (jauge de Lorenz)

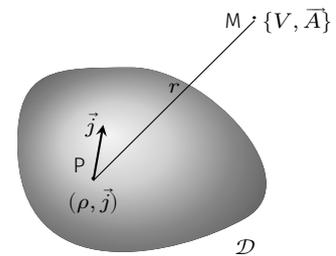
$$\begin{aligned} V(M, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P, t - r/c)}{r} d\tau \\ \vec{A}(M, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\vec{j}(P, t - r/c)}{r} d\tau \end{aligned} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (10.13)$$


FIG. 10.4 : Notations associées.

Tout se passe comme si chaque point P de la distribution produisait en M un potentiel électromagnétique correspondant à celui vu en régime stationnaire à ceci près qu'il faut considérer l'état de P à l'instant $t - PM/c$ pour connaître l'effet en M à l'instant t . Ce retard⁵ est dû au terme en

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

qui traduit un *phénomène de propagation* à la vitesse c .

Insistons sur le fait que ce découplage n'est possible qu'avec les potentiels et dans le cadre de la jauge de Lorenz. Le découplage des champs \vec{E} et \vec{B} n'est possible qu'en régime statique. Une fois ces potentiels calculés, on en déduit le champ électromagnétique par les relations (10.6) et (10.7).

⁵ : D'où le terme de potentiels retardés.

Approximation des régimes quasi-stationnaires

Comme nous venons de le voir, le potentiel électromagnétique $\{V, \vec{A}\}$ dépend de l'état des sources à l'instant $t - PM/c$ avec $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$. Nous verrons que c correspond à la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques et qu'elle vaut environ $3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

ARQS

L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) consiste à négliger le terme de propagation, autrement dit à considérer la vitesse de propagation infinie.

Dans ce contexte, les potentiels prennent la forme suivante :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P, t)}{r} d\tau \quad \text{et} \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\vec{j}(P, t)}{r} d\tau \quad (10.14)$$

On en tire plusieurs conséquences.

- ▶ L'expression du potentiel vecteur est la même que celle vue en magnétostatique, à une nuance près : la densité de courant dépend a priori du temps. Ainsi, la loi de Biot et Savart reste valide⁶ dans l'ARQS.
- ▶ Pour les mêmes raisons, le théorème d'Ampère vu en magnéto-statique est encore valide :

$$\text{rot } \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t)$$

Par conséquent, l'ARQS revient à négliger le courant de déplacement $\vec{j}_d = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$.

- ▶ Prenons la divergence de l'équation de Maxwell précédente. On aboutit à $\text{div } \vec{j} = 0$: dans l'ARQS, le flux du courant électrique se conserve. C'est cette propriété qui est à la base de l'électrocinétique⁷
- ▶ Bien que le potentiel scalaire présente la même expression qu'en régime stationnaire, le champ électrique viole la loi de Coulomb puisque

$$\vec{E}(M, t) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t}$$

Autrement dit, l'ARQS néglige les phénomènes de propagation mais pas les phénomènes d'induction.

L'ARQS suppose que la source évolue au cours du temps avec un temps caractéristique T suffisamment grand devant le retard τ dû à la propagation. En régime sinusoïdal cela signifie que

$$\frac{PM}{c} \ll T \quad \text{soit} \quad PM \ll cT = c/\nu = \lambda$$

En particulier, sur une distance de 1 m, l'ARQS est valable pour des fréquences $\nu \ll 300 \text{ MHz}$: c'est le domaine de l'électrocinétique. Dans le cas des courants industriels la fréquence est fixée à 50 Hz, ce qui impose $PM \ll 6\,000 \text{ km}$: à l'échelle d'un pays, le transport de l'électricité peut être traité dans le cadre de l'ARQS.

6 : Dans l'ARQS \vec{B} prend la forme

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\vec{j}(P, t) \wedge \vec{u}}{r^2} d\tau$$

7 : On en tire la loi des nœuds. En particulier, en tout point d'une branche d'un circuit l'intensité électrique prend la même valeur à un instant t .

Les équations de Maxwell relient les sources électriques (charges et courants) au champ électromagnétique. Dans ce cours nous nous intéressons à la dynamique du champ électromagnétique dans le vide sans se préoccuper des sources qui en sont à l'origine.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/ondes-em.php>

11.1 Propagation du champ dans le vide

Équation de propagation

Plaçons-nous dans une région de l'espace où règne le vide : aucune matière n'y est présente; en particulier les densités de charge et courant électrique sont rigoureusement nuls. Dans cette région, les équations de Maxwell prennent la forme simple suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right| \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}$$

Pour obtenir l'équation qui régit la dynamique du champ électrique ou magnétique on utilise l'identité :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \quad \text{soit} \quad \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Commençons par l'appliquer au champ électrique :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

Par ailleurs, on a également

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On aboutit à l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

En procédant de la même manière avec le champ magnétique, c'est-à-dire en calculant $\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B})$, on laisse au lecteur le soin de vérifier que le champ magnétique est régi par la même équation.

11.1 Propagation dans le vide	129
Équation de propagation	129
Propagation isotrope . . .	130
Vitesse de propagation . . .	132
11.2 Propagation unidimensionnelle	133
Onde plane	133
OPPH	134
Vecteur d'onde	136
Notation complexe	136
11.3 Polarisation	137
Généralités	137
Polarisation rectiligne	137
Polarisation elliptique	138
Polarisation circulaire	138
Polarisation aléatoire	140
Production de lumière polarisée	140



FIG. 11.1 : Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) est un mathématicien, physicien et philosophe français du siècle des Lumières. Il établit l'équation des ondes en 1746 dans un traité sur la physique des cordes vibrantes.

Équation de propagation du champ électromagnétique

Le champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ vérifie l'équation

$$\Delta\{\vec{E}, \vec{B}\} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\{\vec{E}, \vec{B}\}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

Cette équation aux dérivées partielles d'ordre deux, est dite *équation de d'Alembert* ou *équation des ondes*, car nous verrons que ses solutions caractérisent un phénomène propagatif. Une analyse aux dimensions nous révèle que le terme c représente une vitesse caractéristique :

$$\frac{[E]}{L^2} = \frac{1}{[c^2]} \frac{[E]}{T^2} \quad \text{soit} \quad [c] = \frac{L}{T}$$

Il s'agira de la vitesse de propagation. Par ailleurs, cette équation reste invariante par inversion du sens du temps. En effet, changer t en $-t$ ne change rien à l'opérateur $\partial^2/\partial t^2$, ni au laplacien. Le phénomène décrit est réversible, par conséquent non dissipatif.

Bien entendu, la solution particulière évidente \vec{E} ou $\vec{B} = \vec{c}^{\text{te}}$ ne nous intéresse pas. Nous cherchons des solutions variables dans l'espace et le temps.

Concernant le potentiel électromagnétique $\{V, \vec{A}\}$, on peut vérifier à l'aide des équations (10.11) du chapitre précédent, qu'il est également régi par l'équation d'onde à condition de se placer dans la jauge de Lorentz.

Propagation isotrope

Cherchons la forme des solutions dans le cas où le champ électromagnétique présente la propriété d'isotropie autour d'un point O que nous prenons comme origine du repère. Adoptons les coordonnées sphériques, et posons :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(r, t) \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \vec{B}(r, t)$$

On montre dans ce cas que la composante radiale du champ électromagnétique est nécessairement nulle. Considérons donc la composante orthoradiale $E_\theta(r, t)$. L'équation de d'Alembert devient[10] :

$$\Delta E_\theta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r E_\theta)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2} = 0 \quad (11.1)$$

Les solutions de cette équation aux dérivées partielles se mettent sous la forme

$$E_\theta = \frac{1}{r} [f(r - ct) + g(r + ct)]$$

[10] : ROUSSEL (2013), *Les opérateurs différentiels*

Démonstration

Posons $\psi = rE_\theta$. L'équation (11.1) se ramène à

$$\frac{\partial^2(\psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Effectuons le changement de variables $u = r - ct$ et $v = r + ct$. On a

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \left[\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u} \right]$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u} \right) \right] = c^2 \left[\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} \right]$$

Finalement l'équation des ondes prend la forme simple suivante

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} = 0$$

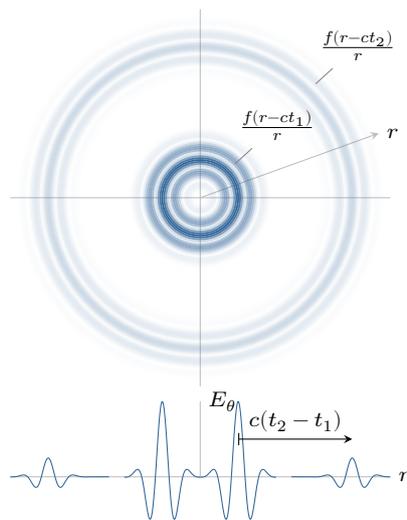
Intégrons par rapport à u puis par rapport à v :

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = F(v) \rightarrow \psi(u, v) = \int F(v) dv + f(u) = g(v) + f(u)$$

Revenons avec les variables (r, t) :

$$rE_\theta = f(r - ct) + g(r + ct) \quad \text{CQFD}$$

Interprétons le terme $f(r-ct)$. À $t = 0$ ce signal vaut $f(r)$, et à l'instant $t > 0$ le signal $f(r - ct)$ est le même signal translaté radialement de la distance ct . Autrement dit, $f(r - ct)$ est un signal qui se propage radialement à la vitesse c . Ainsi le terme $f(r - ct)/r$ représente un signal qui se propage radialement tout en s'amortissant¹ au fur et à mesure de sa propagation.



1 : Cet amortissement n'est en aucun cas lié à un phénomène dissipatif. Au contraire, comme nous le verrons ultérieurement, il est la conséquence de la conservation de l'énergie.

FIG. 11.2 : Simulation d'un signal de la forme $f(r - ct)/r$.

On appelle onde sphérique divergente ce type d'onde. En effet, sa surface d'onde² a pour équation $r - ct = C^{te}$ ce qui correspond à une sphère se dilatant à la vitesse c . Ce type d'émission électromagnétique décrit assez bien le comportement des étoiles par exemple.

2 : Rappelons que la surface d'onde correspond à l'ensemble des points qui, à un instant t , présente la même valeur du champ.

De la même manière, le terme $g(r + ct)/r$ représente une onde sphérique se contractant à la vitesse c .

Finalement, la propagation isotrope d'une onde électromagnétique à la vitesse c est une solution de l'équation de d'Alembert. Lorsque l'on se trouve assez loin de la source d'émission, ces ondes sphériques « s'aplatissent » et présentent une structure d'ondes planes que nous étudions plus en détail dans la section suivante.

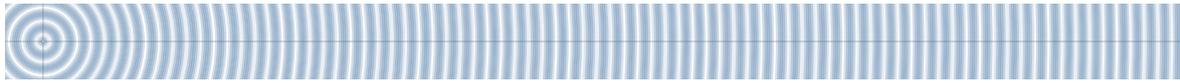


FIG. 11.3 : « Aplatissement » des ondes sphériques.

Vitesse de propagation

L'équation de propagation prévoit donc l'existence d'ondes électromagnétiques se propageant dans le vide à la vitesse

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \heartsuit \quad (11.2)$$



FIG. 11.4 : Heinrich Rudolph Hertz (1857-1894) est un physicien allemand qui découvrit l'effet photoélectrique et confirma l'existence des ondes électromagnétiques.

À l'époque de Maxwell, les constantes μ_0 et ϵ_0 étaient connues grâce aux travaux expérimentaux de Kohlrausch et Weber. Le calcul donna $c \simeq 3,11 \times 10^8 \text{ m/s}^{-1}$, valeur étrangement proche de la vitesse de la lumière déterminée par Fizeau en 1849. En effet, à l'aide d'une roue dentée en rotation rapide, Hippolyte Fizeau mesure une vitesse de la lumière d'environ $3,15 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Il n'en faut pas plus pour pousser Maxwell à conjecturer la nature électromagnétique de la lumière. Il écrira :

« The agreement of the results seems to show that light and magnetism are affections of the same substance, and that light is an electromagnetic disturbance propagated through the field according to electromagnetic laws » – J.C Maxwell

3 : Par exemple, Faraday avait mis en évidence l'effet qui porte maintenant son nom : un champ magnétique axial peut faire tourner le plan de polarisation de la lumière. L'angle de rotation dépend de l'intensité du champ magnétique et du milieu dans lequel la lumière se propage.

L'idée que la lumière pouvait être de nature électromagnétique était dans l'air du temps et de nombreux indices existaient déjà du temps de Maxwell³. Toutefois, c'est en 1888, neuf ans après la mort de Maxwell, que le physicien allemand Heinrich Rudolf Hertz confirme l'existence de telles ondes. Ces ondes, dit hertziennes, seront à l'origine du développement de la communication à distance et de la radio.

Depuis 1983, la vitesse de la lumière dans le vide est devenue une constante fondamentale définie par le Système international des unités. Sa valeur est fixée à

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$$

11.2 Propagation unidimensionnelle

Onde plane

L'onde plane est une solution unidimensionnelle de l'équation d'onde. Autrement dit, le champ électromagnétique ne dépend que d'une dimension d'espace - prenons x par exemple - en plus de la dimension temporelle : $\{\vec{E}(x, t), \vec{B}(x, t)\}$.

L'équation d'onde devient

$$\frac{\partial^2 \{\vec{E}, \vec{B}\}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \{\vec{E}, \vec{B}\}}{\partial t^2} = 0$$

et la solution se met sous la forme

$$\vec{E} = \vec{E}_1(x - ct) + \vec{E}_2(x + ct) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_1(x - ct) + \vec{B}_2(x + ct)$$

Les termes $\vec{E}_1(x - ct)$ et $\vec{B}_1(x - ct)$ représentent des ondes planes se propageant dans le sens des x croissants. En effet, la surface d'onde a pour équation

$$x - ct = C^{\text{te}}$$

ce qui représente un plan parallèle à (yOz) se déplaçant à la vitesse $\dot{x} = c$ suivant \vec{u}_x . Il s'agit d'une *onde plane progressive*. Les termes $\vec{E}_2(x + ct)$ et $\vec{B}_2(x + ct)$ désignent quant à eux le même type d'onde se propageant à la vitesse c dans la direction opposée : il s'agit d'une *onde plane régressive*.

Suite aux expériences menées par Fresnel et Arago au début du XIX^e siècle, Fresnel avait conjecturé la nature transversale de l'onde lumineuse. C'est effectivement une des caractéristiques des ondes planes électromagnétiques qui découle des équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \text{div} \vec{E} = 0 \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \partial E_x / \partial x = 0 \\ \partial B_x / \partial x = 0 \end{cases}$$

Les relations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday impliquent

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{cases}$$

Finalement, on aboutit à la conclusion que le champ électromagnétique suivant x ne dépend ni de x ni de t . Par conséquent, il ne peut être que constant. Puisque nous cherchons des solutions variables, nous pouvons ignorer cette solution et poser $E_x = B_x = 0$. Le champ électromagnétique est orthogonal à la direction de propagation ; l'onde électromagnétique est *transversale*.

Allons plus loin en déterminant la structure du champ électromagnétique transportée par l'onde plane. Pour cela, supposons que le champ électromagnétique se propage suivant les x croissants⁴ :

$$\{\vec{E}(x, t), \vec{B}(x, t)\} = \{\vec{E}(u), \vec{B}(u)\} \quad \text{avec} \quad u = x - ct$$

4 : Le lecteur pourra vérifier que les conclusions auxquelles on arrive ne dépendent pas de ce choix.

Déterminons alors le champ magnétique à l'aide de la relation de Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

Puisque les champs ne dépendent que de la variable $u = x - ct$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{dE_z}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dE_z}{du} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{dB_y}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{dB_y}{du} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{dE_y}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dE_y}{du} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{dB_z}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{dB_z}{du} \end{cases}$$

Après intégration par rapport à u on aboutit à :

$$E_z = -cB_y \quad \text{et} \quad E_y = cB_z$$

Le champ magnétique est donc entièrement déterminé par le champ électrique. On remarque notamment :

- ▶ $\vec{E} \perp \vec{B}$ puisque $\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = 0$;
- ▶ Le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}_x)$ est direct car $(\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_x > 0$;
- ▶ $\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$.

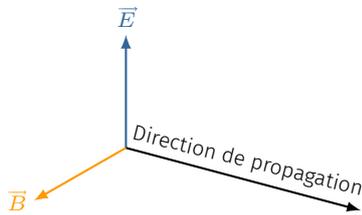


FIG. 11.5 : Structure d'une onde plane.

Finalement on retiendra la structure générale d'une onde plane progressive ou régressive :

Structure d'une onde plane électromagnétique

- ▶ L'onde est transversale;
- ▶ \vec{E} est perpendiculaire à \vec{B} ;
- ▶ $B = E/c$;
- ▶ le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}_x)$ est direct.

Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH)

Par définition, une onde plane progressive harmonique est de la forme

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(k(x - ct)) \quad \text{avec} \quad \vec{E}_0 \perp \vec{u}_x$$

où k est appelé **nombre d'onde**. En $x = 0$, le champ oscille comme $\cos(\omega t)$ avec une pulsation

$$\omega = kc \quad \heartsuit \quad (11.3)$$

Cette oscillation présente une période temporelle $T = 2\pi/\omega$ (en s) et une fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$ (en Hz).

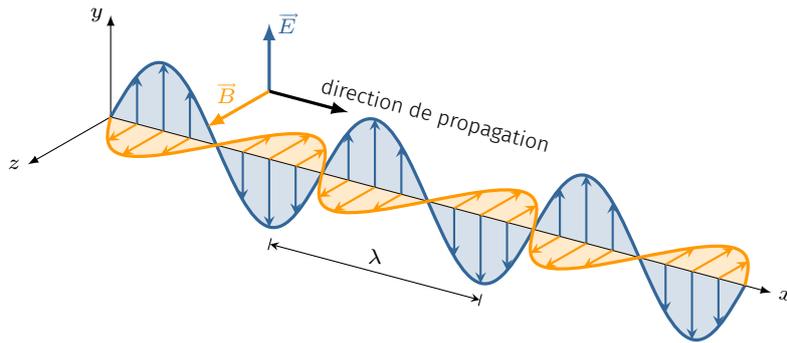


FIG. 11.6 : Structure d'une onde plane harmonique (ici polarisée rectilignement suivant Oy).

Après une durée T le signal s'est propagé d'une longueur λ , dite **longueur d'onde**, telle que

$$\lambda = cT = \frac{2\pi}{k} \quad \heartsuit \quad (11.4)$$

Pour résumer, une onde plane progressive s'écrit sous différentes formes selon que l'on utilise les paramètres (ω, k) ou (T, λ) .

$$\vec{E}(x, t) = \begin{cases} \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx) & \text{avec } \omega = ck \\ \vec{E}_0 \cos[2\pi(t/T - x/\lambda)] & \text{avec } \lambda = cT \end{cases}$$

Finalement, quand on s'intéresse à une onde plane dans le vide, fixer la longueur d'onde c'est fixer la fréquence ν , la pulsation ω , la période T et le nombre d'onde k . Nous verrons qu'il suffit ensuite de préciser l'orientation du champ électrique pour caractériser complètement l'onde plane.

Les premières ondes électromagnétiques découvertes par Hertz présentaient une longueur d'onde de quelques mètres. Ces ondes furent appelées ondes hertziennes (ou onde radio). On a pris l'habitude de découper l'intervalle des longueurs d'onde en différents domaines spectraux qui constituent le *spectre électromagnétique*. Dans le domaine optique, on parlera plutôt d'ondes planes *monochromatiques* car la fréquence du signal électromagnétique détermine la couleur de la lumière visible.

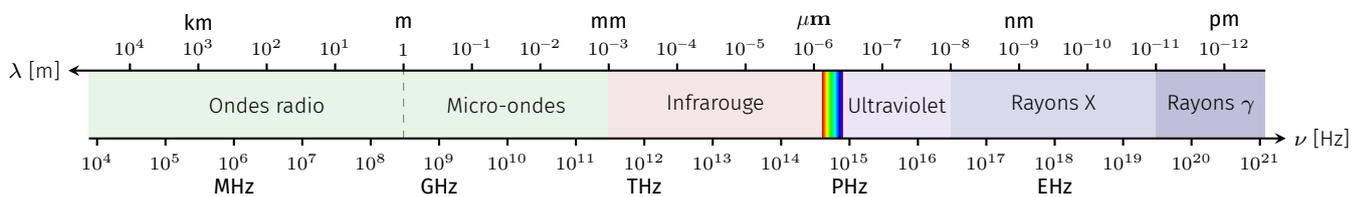


FIG. 11.7 : Spectre électromagnétique.

Vecteur d'onde

Définition

Le vecteur d'onde est un vecteur noté \vec{k} qui présente les propriétés suivantes :

- ▶ sa norme donne le nombre d'onde : $|\vec{k}| = k = 2\pi/\lambda$;
- ▶ son orientation est donnée par le sens de propagation.

Pour une onde plane se propageant suivant $+\vec{u}_x$, on a donc $\vec{k} = k\vec{u}_x$.

De manière générale, une onde plane qui se propage suivant la direction \vec{u} présente un vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}$. Dans ce cas, l'onde plane harmonique s'écrit

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k\xi)$$

où ξ est la coordonnée le long de l'axe orienté par \vec{u} . Considérons un point M de l'espace et appelons H le projeté orthogonal de M sur l'axe (O, \vec{u}) . H est repéré par la coordonnée ξ . On a alors la propriété suivante :

$$\vec{k} \cdot \vec{OM} = k\vec{u} \cdot (\vec{OH} + \vec{HM}) = k \text{ OH} = k\xi$$

de sorte que l'expression générale d'une onde plane harmonique de vecteur d'onde \vec{k} s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \heartsuit \quad (11.5)$$

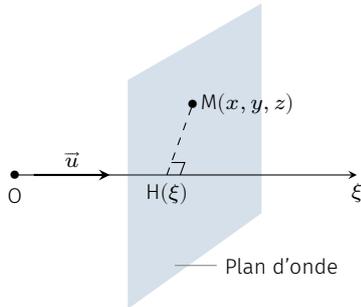


FIG. 11.8 : Plan d'onde se propageant suivant \vec{u} .

On a choisit l'origine des temps de façon à ce que la phase à l'origine soit nulle. Si ce n'est pas le cas, on écrira

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)$$

Notation complexe

Il est souvent pratique d'utiliser la notation complexe pour manipuler les ondes planes harmoniques. L'idée consiste à associer à chaque terme harmonique de la forme $A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$, le nombre complexe

$$Ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)} = \underbrace{Ae^{i\varphi}}_A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

où A est appelé *amplitude complexe*.

La partie imaginaire du nombre complexe $Ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ étant sinusoidale, elle est aussi solution de l'équation d'onde. Ainsi la linéarité des équations de Maxwell garantit que ces représentations complexes soient solutions des équations de Maxwell.

L'intérêt majeur de la notation complexe réside dans la simplification qu'elle apporte dans les opérations de dérivation. On vérifie aisément que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x,y,z} \rightarrow i\omega \times \quad \vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k} \cdot \quad \text{et} \quad \Delta = \vec{\nabla}^2 \rightarrow -k^2 \times$$

Exemple

Montrons à l'aide de la notation complexe qu'une OPPH est nécessairement transversale dans le vide. Partons des équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson dans le vide :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Puis adoptons la notation complexe :

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{B}} = i\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$$

On en déduit immédiatement que les champs \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires au vecteur d'onde et donc à la direction de propagation.

$\underline{\vec{E}}$ désigne dans ce cours le champ électrique en représentation complexe. Idem pour le champ magnétique.

11.3 Polarisation

Généralités

Nous avons vu qu'une onde plane harmonique est entièrement déterminée si l'on connaît deux vecteurs parmi les trois vecteurs \vec{E} , \vec{B} et \vec{k} . On a coutume de choisir le couple (\vec{E}, \vec{k}) pour décrire une telle onde électromagnétique :

- ▶ \vec{k} indique sa direction de propagation ainsi que sa longueur d'onde ($k = 2\pi/\lambda$) et donc sa fréquence ($\nu = c/\lambda$).
- ▶ \vec{E} détermine complètement la structure du champ électromagnétique puisque $B = E/c$ et le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ est direct.

Le mouvement décrit par l'extrémité du champ électrique, dans le plan d'onde, définit l'**état de polarisation** de l'onde. On distingue trois types de polarisation :

- ▶ la polarisation rectiligne ;
- ▶ la polarisation circulaire ;
- ▶ la polarisation elliptique.

Décrivons en détail ces différentes polarisations.

Polarisation rectiligne

Pour fixer les idées, considérons une OPPH se propageant suivant l'axe des x croissants ($\vec{k} = k\vec{u}_x$). Le champ électrique oscille donc dans un plan parallèle à (yOz) . Adoptons la notation complexe pour exprimer le champ électrique :

$$\underline{\vec{E}}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0^y e^{i(\omega t - kx)} \\ E_0^z e^{i(\omega t - kx)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\underline{E}_0^y, \underline{E}_0^z) \in \mathbb{Z}^2$$

Supposons que chaque composante oscille en phase ou en opposition de phase. Dans ce cas on a

$$\underline{E}_0^z = \alpha \underline{E}_0^y \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Plaçons-nous en $x = 0$ et observons la courbe décrite par l'extrémité du champ électrique.

$$\begin{cases} \underline{E}_y = \underline{E}_0^y e^{i(\omega t)} \\ \underline{E}_z = \underline{E}_0^z e^{i(\omega t)} \end{cases} \xrightarrow{\text{notation réelle}} \begin{cases} E_y(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ E_z(t) = \alpha A \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

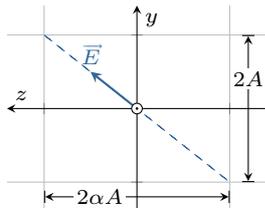


FIG. 11.9 : Polarisation rectiligne. L'extrémité du vecteur \vec{E} décrit le segment en pointillé.

où l'on a posé $\underline{E}_0^y = Ae^{i\varphi}$. Ainsi la composante suivant Oy oscille entre $-A$ et A , et la composante suivant Oz entre $-\alpha A$ et αA . De surcroît, à chaque instant $E_z(t) = \alpha E_y(t)$. Autrement dit, l'extrémité du champ électrique décrit un segment sur la droite d'équation $z = \alpha y$: on dit que l'onde est **polarisée rectilignement**.

La structure de l'onde plane représentée sur la FIG. 11.6 correspond à une onde harmonique polarisée rectilignement suivant l'axe Oy . On a donc $\alpha = 0$ puisque $E_z = 0$.

Polarisation elliptique

Voyons maintenant le comportement du champ électrique dans le cas général où les composantes ne sont ni en phase ni en opposition de phase. Posons

$$\underline{E}_0^y = A_y e^{i\varphi_y} \quad \text{et} \quad \underline{E}_0^z = A_z e^{i\varphi_z}$$

Dans le plan $x = 0$, la vibration électrique s'écrit

$$\begin{cases} \underline{E}_y = \underline{E}_0^y e^{i(\omega t)} \\ \underline{E}_z = \underline{E}_0^z e^{i(\omega t)} \end{cases} \xrightarrow{\text{notation réelle}} \begin{cases} E_y(t) = A_y \cos(\omega t + \varphi_y) \\ E_z(t) = A_z \cos(\omega t + \varphi_z) \end{cases}$$

On montre que l'extrémité du champ électrique trace une ellipse inscrite dans un rectangle d'axes yOz et de dimensions $2A_y \times 2A_z$. On dit alors que l'onde présente une **polarisation elliptique**.

Lorsque cette ellipse est parcourue dans le sens horaire pour un observateur qui voit l'onde se diriger vers lui, on parle de polarisation elliptique droite ; on a alors $\Delta\varphi = \varphi_z - \varphi_y \in]0; \pi[$. Dans le cas contraire, on parle de polarisation elliptique gauche.

Polarisation circulaire

La polarisation circulaire est une polarisation elliptique particulière. Elle se rencontre lorsque les composantes du champ électrique oscillent avec la **même amplitude et en quadrature de phase**. L'ellipse se réduit alors à un cercle parcouru dans le sens horaire (circulaire droite) si $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, et dans le sens anti-horaire (circulaire gauche) si

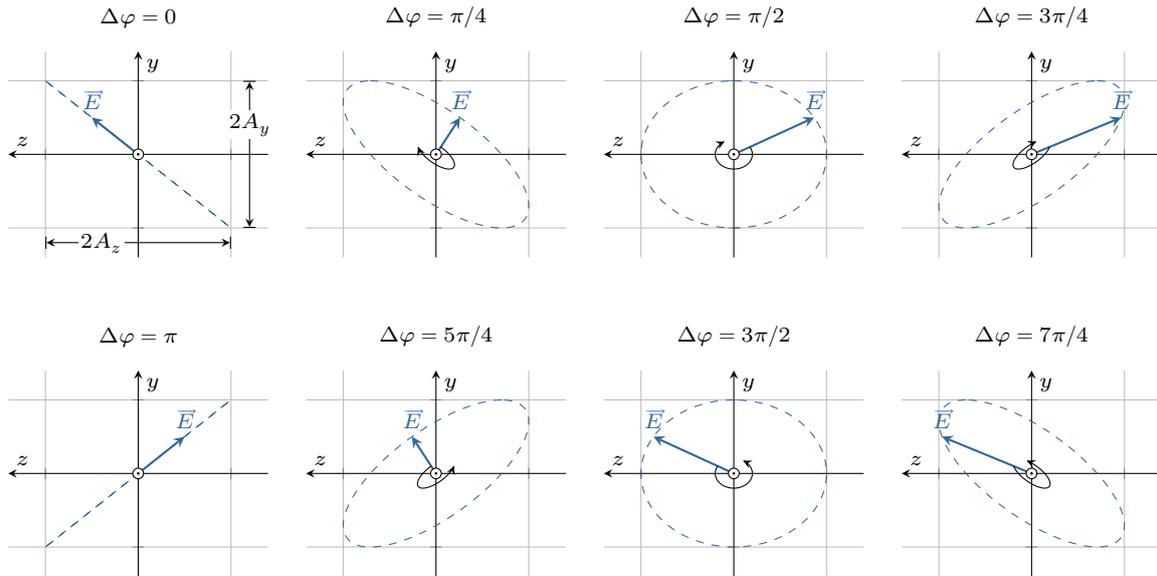


FIG. 11.10 : Différentes polarisations en fonction du déphasage $\Delta\varphi = \varphi_z - \varphi_y$.

$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$. En notation réelle, on obtient

$$\begin{cases} E_y(t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi) \\ E_z(t) = \pm A \sin(\omega t - kx + \varphi) \end{cases}$$

de sorte qu'à chaque instant $E_y(t)^2 + E_z(t)^2 = A^2$: l'extrémité du champ électrique décrit un cercle de rayon A .

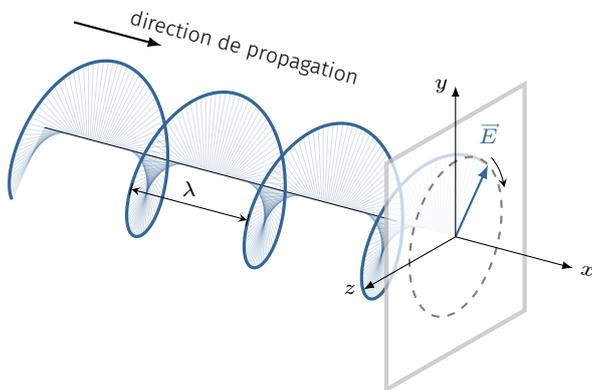


FIG. 11.11 : Structure d'une onde plane harmonique polarisée circulairement (droite).

En notation complexe, on a

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ A e^{i(\omega t - kx + \varphi)} \\ A e^{i(\omega t - kx + \varphi \pm \frac{\pi}{2})} \end{pmatrix} = A e^{i(\omega t - kx + \varphi)} (\vec{u}_y \pm i\vec{u}_z)$$

Il est commode de définir les deux vecteurs suivants :

$$\vec{u}_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}_y + i\vec{u}_z) \quad \text{et} \quad \vec{u}_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}_y - i\vec{u}_z)$$

Ces deux vecteurs forment une base orthonormée⁵ de \mathbb{C}^2 , et sont

5 : On laisse au lecteur le soin de vérifier que $\vec{u}_d \cdot \vec{u}_d^* = \vec{u}_g \cdot \vec{u}_g^* = 1$ et $\vec{u}_d \cdot \vec{u}_g^* = 0$.

associés aux deux états de polarisation circulaire :

$$\begin{aligned} \text{polarisation circulaire droite : } & \vec{E}(M, t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi)} \vec{u}_d \\ \text{polarisation circulaire gauche : } & \vec{E}(M, t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi)} \vec{u}_g \end{aligned}$$

Tout état de polarisation peut être décrit dans cette base. Par exemple, deux ondes de même amplitude et polarisées circulairement -l'une à gauche, l'autre à droite- se composent en donnant une onde polarisée rectilignement :

$$Ae^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_d + Ae^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_g = \sqrt{2}Ae^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$$

Polarisation aléatoire

Une onde plane harmonique est nécessairement polarisée. Toutefois dans la réalité on rencontre plutôt des ondes quasi-harmoniques (ou quasi-monochromatiques). En effet, en première approximation, la lumière naturelle peut être décrite par une émission d'ondes de polarisation elliptique, mais dont la phase varie de façon imprévisible sur une durée caractéristique beaucoup plus courte que le temps de réponse des détecteurs usuels. On dit qu'il s'agit d'ondes *incohérentes*[11] et que la lumière naturelle *n'est pas polarisée*.

[11] : ROUSSEL (2019), *Notion de cohérence*

Cependant, la lumière peut se polariser totalement ou partiellement après interaction avec la matière comme nous allons le voir par la suite.

Production de lumière polarisée

Il existe différentes façons d'obtenir une lumière polarisée.

Polarisation par dichroïsme – Certains matériaux ont la particularité d'absorber une composante du champ électrique sans affecter la composante perpendiculaire. On parle de *dichroïsme*. Ces matériaux sont souvent constitués de polymères alignés dans une direction qui correspond à la direction absorbante. Ainsi lorsque l'on envoie une lumière non polarisée au travers de ce matériau, il en ressort une onde polarisée rectilignement suivant la direction perpendiculaire à la direction absorbante. En pratique on utilise couramment des polaroïds⁶ qui se présentent comme des feuilles de plastique transparent, et que l'on appelle polariseurs.

6 : Polaroid® est une marque déposée de la société *Polaroid corporation* fondée en 1937 par Edwin Land pour exploiter commercialement son invention.

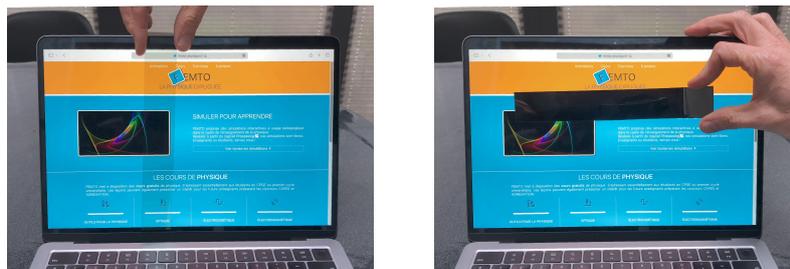


FIG. 11.12 : Lorsqu'on présente un Polaroid devant un écran LCD, on s'aperçoit que pour une certaine orientation du polaroid, aucune lumière n'est transmise : la lumière émise par un écran est polarisée rectilignement.

Comme on peut le voir sur [FIG. 11.12](#), un polariseur peut servir à mettre en évidence une lumière polarisée rectilignement. On dit alors que le polariseur est utilisé en *analyseur*.

Polarisation par réflexion vitreuse – Historiquement, la polarisation de la lumière a été découverte par le français Louis Malus en 1809 sur la lumière réfléchie par réflexion vitreuse. Si on envoie de la lumière naturelle sur une substance comme le verre, on observe que la lumière réfléchie est polarisée rectilignement pour une incidence particulière définie par l'angle i_B , dit *angle de Brewster*. Le champ électrique de l'onde réfléchie est alors perpendiculaire au plan d'incidence. L'angle i_B est tel que

$$\tan(i_B) = n$$

où n est l'indice de réfraction du milieu réfléchissant par rapport au milieu ambiant. Dans le cas d'une interface air/verre on trouve $i_B \simeq 56^\circ$, et pour l'interface air/eau $i_B = 53^\circ$. Ainsi, pour des incidences voisines de l'incidence de Brewster, un polariseur dont l'axe de transmission est parallèle au plan d'incidence éliminera une grande partie de la lumière réfléchie ([FIG. 11.13](#)); c'est l'intérêt des lunettes de soleil à verres polarisants.



FIG. 11.13 : Élimination des reflets à la surface d'un extincteur à l'aide d'un polaroid.

Polarisation par biréfringence – Certains cristaux transparents ont la propriété de dédoubler les images à cause du phénomène de double réfraction. Cette *biréfringence* fut initialement observée en 1669 par Erasmе Bartholin avec du spath d'Islande, un cristal de calcite. Un rayon incident arrivant sur un tel milieu donne naissance en général à deux rayons réfractés ce qui correspond pour ces rayons à deux valeurs de l'indice de réfraction. Ces deux rayons présentent deux polarisations rectilignes orthogonales entre elles. Les premiers polariseurs utilisèrent cette propriété.

FIG. 11.14 : Double réfraction à travers un cristal de calcite (©Fondo Antiguo de la Biblioteca de la Universidad de Sevilla)



À venir...

ANNEXES

Calcul de l'action magnétique subie par une spire circulaire

A

Dans le [Chapitre 5](#) nous avons établi les lois qui régissent le comportement d'un dipôle magnétique stationnaire dans un champ magnétique extérieur. Nous proposons ici une autre démonstration, reposant sur le calcul direct de la résultante des forces de Laplace et de leur moment dans le cas particulier d'une boucle de courant circulaire dans un champ magnétique uniforme.

Considérons une spire de rayon R de centre O et d'axe (Oz) , parcourue par un courant d'intensité I en présence d'un champ magnétique uniforme

$$\vec{B}^{\text{ext}} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

Il produit en un point P de la spire, une force de Laplace $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}$. Repérons P par son angle polaire θ . On a

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad d\vec{\ell} = d\vec{OP} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta d\theta \\ R \cos \theta d\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

La force de Laplace au point P vaut donc

$$d\vec{F} = IR d\theta \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = IR d\theta \begin{pmatrix} B_z \cos \theta \\ B_z \sin \theta \\ -\sin \theta B_y - \cos \theta B_x \end{pmatrix}$$

On voit immédiatement qu'en intégrant cette force le long de la spire, on obtient une résultante nulle puisque $\oint \sin \theta d\theta = \oint \cos \theta d\theta = 0$.

Résultante des forces magnétiques

Une spire circulaire de courant en présence d'un champ magnétique uniforme ressent une résultante des forces magnétiques nulle. Ce résultat se généralise à toute boucle de courant stationnaire.

Calculons maintenant le moment $\vec{\Gamma}^1$ des forces magnétiques. Une portion de spire subit un moment magnétique par rapport au centre de la spire qui vaut

$$d\vec{\Gamma} = \vec{OP} \wedge d\vec{F} = IR^2 d\theta \begin{pmatrix} -\sin^2 \theta B_y - \sin \theta \cos \theta B_x \\ \cos^2 \theta B_x + \sin \theta \cos \theta B_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il ne nous reste plus qu'à intégrer le long de la spire. En utilisant $\oint \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$ et $\oint \sin^2 \theta d\theta = \oint \cos^2 \theta d\theta = \pi$, on obtient

$$\vec{\Gamma} = (\pi R^2) I \begin{pmatrix} -B_y \\ B_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

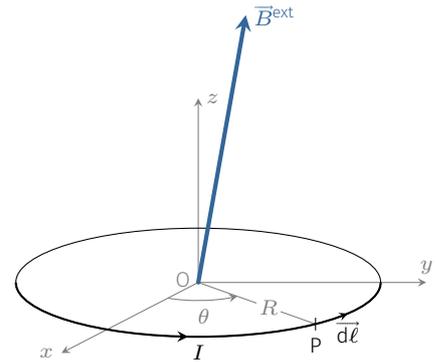


FIG. A.1 : Spire circulaire en présence d'un champ magnétique extérieur.

1 : Rappelons que l'on parle de couple lorsqu'un système de forces a une résultante nulle. On note traditionnellement $\vec{\Gamma}$ le moment résultant, lequel ne dépend pas du point par rapport auquel on le calcule (voir [12]).

Or on a $\vec{u}_z \wedge \vec{B}^{\text{ext}} = \begin{pmatrix} -B_y \\ B_x \\ 0 \end{pmatrix}$. On peut donc écrire le moment des forces magnétiques sur la spire par :

$$\vec{\Gamma} = I (\pi R^2) \vec{u}_z \wedge \vec{B}^{\text{ext}} = \vec{m} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}$$

Où \vec{m} est le moment magnétique de la spire.

Moment d'orientation

Une spire circulaire de courant en présence d'un champ magnétique uniforme ressent un moment des forces donné par la relation

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}$$

Ce couple magnétique tend à orienter le moment magnétique dans le sens du champ magnétique imposé.

Calcul numérique de l'inductance d'une bobine

B

La détermination de l'auto-inductance L d'un solénoïde ne pose pas de gros problèmes expérimentaux. Associée à un conducteur ohmique et un condensateur, la bobine forme un oscillateur électrique dont la résonance est couramment illustrée dans le secondaire. Rappelons que la fréquence de résonance (résonance d'intensité)

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

permet de déduire L si la capacité C du condensateur est connue¹. Le calcul théorique est quant à lui beaucoup plus délicat. On propose ici une méthode basée sur le calcul de la mutuelle inductance entre deux spires. Il en ressort une formule faisant intervenir des sommes, facile à implémenter dans un programme.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/calcul-inductance-bobine.php>

B.1 Couplage entre deux spires

Avant de s'intéresser au solénoïde, commençons par étudier le couplage électromagnétique entre deux spires circulaires coaxiales parcourues par un courant électrique.

Inductance mutuelle entre deux spires

Considérons deux spires filiformes, l'une de diamètre D_1 , l'autre de diamètre D_2 , et séparées par la distance d_{12} . Parcourue par un courant électrique (d'intensité respectives I_1 et I_2), chaque spire génère un flux magnétique à travers l'autre spire. Appelons $\phi_{1 \rightarrow 2}$ le flux magnétique produit par la spire 1 à travers la spire 2. On montre facilement que

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = M I_1 \quad \text{et} \quad \phi_{2 \rightarrow 1} = M I_2$$

où M , appelée *inductance mutuelle*, traduit le couplage électromagnétique entre les spires. En général, M dépend de la géométrie des circuits en interaction et de leur position relative. Ici, M est fonction de D_1 , D_2 et d_{12} .

Le calcul exact[13-15] fait intervenir les intégrales elliptiques complètes K et E définies par

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{et} \quad E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

B.1 Couplage entre deux spires	
spires	149
Inductance mutuelle	149
Calcul de E et K	150
Auto-inductance	151
B.2 Applications	152
Bobine monocouche	152
Bobine multicouche	153

1 : Voir par exemple le TP *Modélisation d'une bobine* sur physique.ensc-rennes.fr.

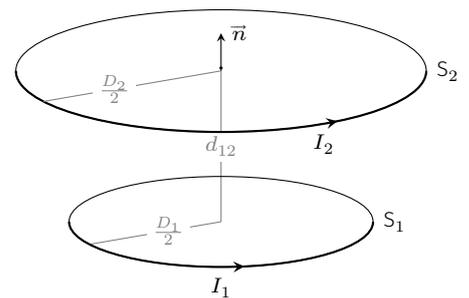


FIG. B.1 : Deux spires en interaction.

[13] : MAXWELL (1891), *A Treatise on Electricity and Magnetism* (reprinted 1954). Vol. One and Two

[14] : RUSSELL (1906), «The magnetic field and inductance coefficients of circular, cylindrical, and helical currents»

[15] : QUEIROZ (2005), «Mutual inductance and inductance calculations by Maxwell's Method»

Maxwell a établi le résultat suivant :

$$M(D_1, D_2, d_{12}) = \mu_0 \sqrt{D_1 D_2} \frac{K(x) - E(x)}{\sqrt{x}}$$

$$\text{avec } \begin{cases} x = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \\ r_1^2 = d_{12}^2 + \frac{1}{4}(D_1 + D_2)^2 \\ r_2^2 = d_{12}^2 + \frac{1}{4}(D_1 - D_2)^2 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Calcul de E et K

Les intégrales elliptiques sont des fonctions paires définies sur l'intervalle $]-1,1[$ et on les représente traditionnellement sur l'intervalle $[0,1[$. Sur cet intervalle $K(x)$ est une fonction croissante et divergente en $x = 1$, alors que $E(x)$ décroît entre $\pi/2$ et 1.

Sous **Python**, les fonctions K et E se trouvent dans la bibliothèque **scipy**. On les appelle à l'aide des syntaxes respectives `scipy.special.ellipk` et `scipy.special.ellipe`. Plus exactement, il s'agit des fonctions

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}} \quad \text{et} \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \varphi} d\varphi$$

Le code [B.1](#) permet de tracer les graphes de la [Fig. B.2](#).

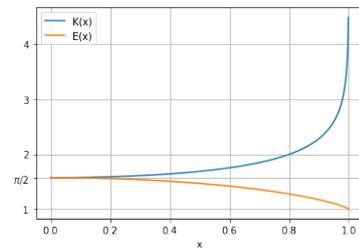


Fig. B.2 : Graphe des fonctions $K(x)$ et $E(x)$.

Listing B.1 : Exemple de code Python.

```
import numpy as np
import scipy as sp
from scipy import special
import matplotlib.pyplot as plt
xx=np.linspace(0,2,1000)
plt.plot(xx, sp.special.ellipk(xx**2),label='K(x)')
plt.plot(xx, sp.special.ellipe(xx**2),label='E(x)')
plt.yticks([1,np.pi/2,2,3,4],labels=[1,'\pi/2',
,2,3,4])
plt.legend()
plt.grid()
plt.xlabel('x')
```

Si les fonctions elliptiques ne sont pas implémentées dans le langage que l'on utilise pour faire des calculs, on peut bien sûr approcher ces intégrales par les méthodes classiques d'intégration numérique². Il existe cependant une manière beaucoup plus efficace et simple à programmer qui repose sur la suite arithmético-géométrique[16]. L'algorithme suivant retourne, après quelques itérations seulement, le résultat $K(x) - E(x)$ avec un niveau de précision fixé par ϵ_0 .

² : Méthodes du rectangle à gauche, du rectangle à droite, du trapèze, méthode de Simpson, etc.

[16] : ROUSSEL (2022), *Intégrales elliptiques complètes*

Calcul numérique de $K(x) - E(x)$

- $a \leftarrow 1$
- $b \leftarrow \sqrt{1-x^2}$
- $c \leftarrow x^2$
- $S \leftarrow c/2$
- $e \leftarrow S$
- $n \leftarrow 1$
- Tant que ($e > \epsilon_0$) faire :
 - $A \leftarrow (a+b)/2$
 - $B \leftarrow \sqrt{a \times b}$
 - $c \leftarrow A^2 - B^2$
 - $a \leftarrow A$
 - $b \leftarrow B$
 - $e \leftarrow 2^{n-1}c$
 - $S \leftarrow S + e$
 - $n \leftarrow n + 1$
- Retourner $S \times \pi/(2a)$

Auto-inductance d'une spire

L'auto-inductance L est liée au flux magnétique ϕ généré par un circuit *sur lui même*, via la relation : $\phi = LI$. Par conséquent on peut considérer que L est une mutuelle inductance entre deux circuits identiques confondus. Dans le cas d'une spire circulaire de diamètre D , on a

$$L = \lim_{d \rightarrow 0} M(D, D, d) = \lim_{x \rightarrow 1} \mu_0 D \frac{K(x) - E(x)}{\sqrt{k}} = \infty$$

Effectivement, à cause du caractère filiforme de la spire, le champ magnétique diverge au voisinage du fil conducteur, et l'énergie magnétique aussi :

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \infty$$

En réalité, l'auto-inductance d'une spire est finie du fait de l'épaisseur non nulle du fil qui le constitue. Si l'on note e cette épaisseur, une bonne approximation de L est donnée par la formule de Kirchoff :

$$L = \mu_0 D \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{8D}{e} \right) - \frac{7}{8} \right] \quad (\text{B.2})$$

Cette formule suppose une spire de section circulaire traversée par un courant uniformément réparti sur la section. De plus l'épaisseur du fil doit être faible devant le diamètre D de la spire.

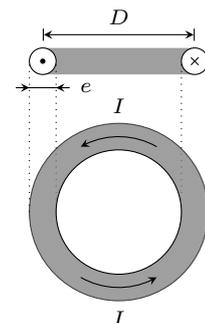


FIG. B.3 : Anneau conducteur. Vues en coupe et de dessus.

B.2 Applications aux solénoïdes

Bobine monocouche

Considérons un solénoïde, constitué par un fil conducteur d'épaisseur e , de section circulaire, enroulé sur un cylindre de diamètre D_0 . Après N tours, la bobine fait une longueur L .

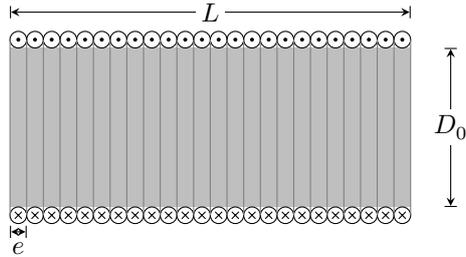


Fig. B.4 : Bobine monocouche vue dans un plan contenant son axe de révolution. Ici $N = 24$.

3 : Si l'on tient compte de l'épaisseur e' de l'isolant entourant le fil conducteur, la distance qui sépare deux spires voisines vaut $e + 2e'$. Pour notre propos nous négligerons e' devant e .

En pratique, l'épaisseur du fil est souvent faible devant le diamètre D_0 de sorte que l'on peut négliger l'hélicité de l'enroulement, et considérer la distribution de courant équivalente à N spires circulaires, coaxiales et jointives³.

Alimentée par un courant d'intensité I , chaque spire produit un flux magnétique à travers les autres et elle-même. Le flux total ϕ qui traverse toutes les spires s'écrit

$$\phi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_{i \rightarrow j} = \sum_{i=1}^N \phi_{i \rightarrow i} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \phi_{i \rightarrow j}$$

4 : On note $D_1 = D_0 + e$ ce diamètre.

où $\phi_{i \rightarrow i}$ représente le flux propre de la i -ième spire et $\phi_{i \rightarrow j}$ le flux engendré par la i -ième spire sur la j -ième. Toutes les spires étant de même épaisseur et de même diamètre⁴, on a

$$\phi_{i \rightarrow i} = LI \quad \text{avec} \quad L = \mu_0 D_1 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{8D_1}{e} \right) - \frac{7}{8} \right]$$

et

$$\phi_{i \rightarrow j} = \phi_{j \rightarrow i} = M(D_1, D_1, |j - i|e) I$$

Par conséquent, le flux magnétique qui traverse la bobine s'écrit

$$\phi = \left[NL + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N M(D_1, D_1, d_{ij}) \right] I = \left[NL + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j > i}^N M(D_1, D_1, d_{ij}) \right] I$$

On peut encore simplifier l'expression car la mutuelle inductance entre deux spires ne dépend que de la distance qui les sépare. On décompte $N - 1$ paires de spires séparées de e , $N - 2$ paires de spires séparées de $2e, \dots$, $N - i$ paires séparées de ie . Finalement, le flux magnétique s'écrit

$$\phi = \left[NL + 2 \sum_{\ell=1}^{N-1} (N - \ell) M(D_1, D_1, \ell e) \right] I = L_{\text{bobine}} I$$

On en déduit la formule donnant l'auto-inductance d'une bobine

mono-couche :

$$L_{\text{bobine}} = NL + 2 \sum_{\ell=1}^{N-1} (N - \ell) M(D_1, D_1, \ell e) \quad (\text{B.3})$$

Relation d'autant plus juste que l'épaisseur e est faible devant le diamètre du solénoïde.

Bobine multicouche

On réalise une bobine multicouche en enroulant le fil électrique sur plusieurs couches. Si l'on note N_c le nombre de couches et p le nombre de spires par couche, on a $N = pN_c$. On peut reprendre le calcul

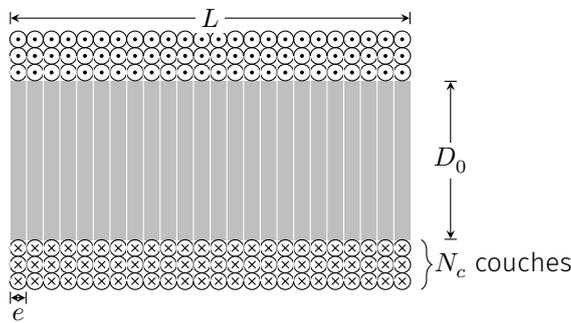


FIG. B.5 : Bobine multi-couche. Ici $N_c = 3$

général et tenir compte du fait que les spires n'ont pas les mêmes diamètres :

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_{i \rightarrow i} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \phi_{i \rightarrow j}$$

Toutefois, ce calcul représente une somme de N^2 termes, ce qui peut être prohibitif en termes de temps de calcul. C'est pourquoi, nous allons chercher à exprimer le flux en effectuant un minimum de sommes.

Tout d'abord, appelons L_k l'auto-inductance d'une spire de la couche k ($k = 1, \dots, N_c$) de diamètre D_k . On a

$$D_k = D_0 + e(2k - 1)$$

$$\sum_{i=1}^N \phi_{i \rightarrow i} = \left(\sum_{k=1}^{N_c} p L_k \right) I \quad \text{avec} \quad L_k = \mu_0 D_k \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{8D_k}{e} \right) - \frac{7}{8} \right] \quad (\text{B.4})$$

Quant au calcul des $\phi_{i \rightarrow j}$, il faut distinguer deux types de situations.

1. Les spires en interaction appartiennent à la même couche. On notera ϕ_{intra} cette contribution.
2. Les spires en interactions sont sur deux couches différentes. On notera ϕ_{extra} cette dernière contribution.

On a vu précédemment que le flux lié aux spires d'une même couche est donné par (B.3). Ici, le nombre de spires sur une couche vaut p , et on ne s'intéresse pas au flux propre. En répétant le calcul pour toutes les couches, on trouve

$$\phi_{\text{intra}} = \left[2 \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{\ell=1}^{p-1} (p - \ell) M(D_k, D_k, \ell e) \right] I$$

Pour ce qui est des interactions entre les spires de diamètres différents, on distingue également deux situations :

1. Considérons une spire sur la couche k en interaction avec une spire *concentrique* sur la couche k' . Pour chaque paire de couches (k, k') il y a p telles interactions. Leur contribution en termes de flux vaut donc

$$\phi_{\text{inter}}^1 = I \sum_{k, k' \neq k}^{N_c} p M(D_k, D_{k'}, 0) = 2pI \sum_{k=1}^{N_c-1} \sum_{k' > k}^{N_c} M(D_k, D_{k'}, 0)$$

2. Considérons maintenant une spire de la couche k en interaction avec une spire *non concentrique* d'une couche $k' \neq k$. Comptons tout d'abord le nombre de spires décalées de e : cela revient à compter l'ensemble des couples d'entiers $(i, j) \in [1, \dots, p]^2$ tel que $|j - i| = 1$. On en a $p - 1$ quand $j - i = 1$ et $p - 1$ quand $j - i = -1$. Au total on trouve $2(p - 1)$. De la même façon, on trouve $2(p - 2)$ spires en interactions décalées de $2e$, etc. Finalement, ce type d'interaction donne lieu à la contribution

$$\begin{aligned} \phi_{\text{inter}}^2 &= I \sum_{k, k' \neq k}^{N_c} \sum_{\ell=1}^p 2(p - \ell) M(D_k, D_{k'}, \ell e) \\ &= 4I \sum_{k=1}^{N_c-1} \sum_{k' > k}^{N_c} \sum_{\ell=1}^p (p - \ell) M(D_k, D_{k'}, \ell e) \end{aligned}$$

En calculant $\phi = \sum_{i=1}^N \phi_{i \rightarrow i} + \phi_{\text{intra}} + \phi_{\text{inter}}^1 + \phi_{\text{inter}}^2$ et en fixant $I = 1$ A, on obtient directement la self-inductance de la bobine multicouche :

$$L_{\text{bobine}} = p(S_1 + 2S_2) + 2S_3 + 4S_4 \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = \sum_{k=1}^{N_c} L_k \\ S_2 = \sum_{k=1}^{N_c-1} \sum_{k' > k}^{N_c} M_{k, k'}^0 \\ S_3 = \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{\ell=1}^{p-1} (p - \ell) M_{k, k}^{\ell} \\ S_4 = \sum_{k=1}^{N_c-1} \sum_{k' > k}^{N_c} \sum_{\ell=1}^p (p - \ell) M_{k, k'}^{\ell} \\ M_{k, k'}^{\ell} = M(D_k, D_{k'}, \ell e) \end{array} \right. \quad (\text{B.5})$$

Cette relation généralise (B.3). On peut vérifier que l'on retrouve bien le cas de la bobine simple lorsque $N_c = 1$. C'est cette relation qui est utilisée dans le [calculateur d'autoinductance en ligne](#) que l'on trouve sur [femto-physique.fr](#).

Références

Références classées par ordre d'apparition.

- [1] Christine BLONDEL et Bertrand WOLFF. *De l'électricité "en + ou en -" de Franklin aux lois de l'électricité*. 2008. (Visité le 06/2008) (cf. p. 6).
- [2] John David JACKSON, Christian JEANMOUGIN et Jean-Pol VIGNERON. *Electrodynamique classique : cours et exercices d'électromagnétisme*. Dunod, 2001 (cf. p. 22, 91).
- [3] Lucas BEGUIN et al. « Direct measurement of the van der Waals interaction between two Rydberg atoms ». In : *Physical review letters* 110.26 (2013), p. 263201 (cf. p. 28).
- [4] R. de BRUYN OUBOTER. « Kamerlingh Onnes découvre la supraconduction ». In : *Pour la science* 235 (mai 1997) (cf. p. 33).
- [5] Steven DIGIANNURIO, Peter PEREZ DE CORCHO et Christopher PRUITT. *A History of the Divergence, Green's, and Stokes' Theorems*. (visité le 2 juin 2020). 2005. URL : <https://christopherpruitt.files.wordpress.com/2015/01/a-history-of-the-divergence-greens-and-stokes-theorems.pdf> (cf. p. 70).
- [6] Liang-Cheng TU et Jun LUO. « Experimental tests of Coulomb's Law and the photon rest mass ». In : *Metrologia* 41.5 (2004), S136 (cf. p. 82).
- [7] H. GIÉ et J-P. SARMANT. *Électromagnétisme*. T. 1. Tec et Doc (Lavoisier), 1985 (cf. p. 96).
- [8] André DEIBER et Hervé IDDA. « Freinage par courants de foucault (II) : Des charges réparties en volume guident les courants induits ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 891 (2007), p. 177-197 (cf. p. 114).
- [9] J. ROUSSEL et D. CORDIER. « Courants de Foucault induits dans un cylindre conducteur - Approche numérique ». In : *Bull. Un. Phys* 105.938(2) (nov. 2011), p. 101-114 (cf. p. 118).
- [10] J. ROUSSEL. *Les opérateurs différentiels*. Fév. 2013. URL : <https://femto-physique.fr/omp/operateurs-differentiels.php> (cf. p. 130).
- [11] J. ROUSSEL. *Notion de cohérence*. Jan. 2019. URL : <https://femto-physique.fr/optique/> (cf. p. 140).
- [12] J. ROUSSEL. *Théorème du moment cinétique*. Sept. 2014. URL : <https://femto-physique.fr/mecanique/> (cf. p. 147).
- [13] James Clerk MAXWELL. *A Treatise on Electricity and Magnetism (reprinted 1954)*. Vol. One and Two. 1891 (cf. p. 149).
- [14] Alexander RUSSELL. « The magnetic field and inductance coefficients of circular, cylindrical, and helical currents ». In : *Proceedings of the Physical Society of London (1874-1925)* 20.1 (1906), p. 476 (cf. p. 149).
- [15] Antonio Carlos M de QUEIROZ. « Mutual inductance and inductance calculations by Maxwell's Method ». In : *Home page of Dr. Antonio Carlos M. de Queiroz* (2005) (cf. p. 149).
- [16] J. ROUSSEL. *Intégrales elliptiques complètes*. Juill. 2022. URL : <https://femto-physique.fr/analyse-numerique/> (cf. p. 150).
- [17] Jean PÉRICART. *Cours d'électricité théorique, Tome 1 : Electrostatique - Electrocinétiq*ue. 1962.

Grandeurs physiques et symboles mathématiques

Constantes physiques définies par le SI (valeurs exactes)

h	Constante de Planck	$6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J Hz}^{-1}$
c	Vitesse de la lumière dans le vide	$299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	Fréquence hyperfine du ^{133}Cs	$9\,192\,631\,770 \text{ Hz}$
e	Charge élémentaire	$1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$
k_{B}	Constante de Boltzmann	$1,380\,649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
N_{A}	Nombre d'Avogadro	$6,022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
$R = k_{\text{B}}N_{\text{A}}$	Constante des gaz parfaits	$8,314\,462\,618 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
K_{cd}	Efficacité lumineuse	683 lm W^{-1}

Autres constantes physiques

G	Constante gravitationnelle	$6,67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
ϵ_0	Permittivité diélectrique du vide	$8,85418781 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
μ_0	Perméabilité magnétique du vide	$1,256637062 \times 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$
m_e	Masse de l'électron au repos	$9,10938370 \times 10^{-31} \text{ kg}$
m_p	Masse du proton au repos	$1,672621923 \times 10^{-27} \text{ kg}$
m_n	Masse du neutron au repos	$1,674927498 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Grandeurs physiques

α	Polarisabilité (m^3)
γ	Conductivité électrique (S.m^{-1})
λ	Densité linéique de charge (C.m^{-1})
\mathcal{E}	Energie (J)
\mathcal{P}	Puissance (W)
\mathcal{V}	Volume (sa mesure en m^3)
μ	Mobilité électrique (T^{-1})
ν	Fréquence (Hz)
ω	Vitesse angulaire, pulsation (rad.s^{-1})
$\vec{\Gamma}$	Moment d'un couple (N.m)

\vec{B}	Champ magnétique (T)
\vec{E}	Champ électrique (V.m ⁻¹)
\vec{f}, \vec{F}	force, résultante des forces (N)
\vec{j}	Densité de courant électrique (A.m ⁻²)
\vec{m}	Moment dipolaire magnétique (A.m ²)
\vec{p}	Moment dipolaire électrique (C.m)
\vec{p}	Quantité de mouvement (kg.m.s ⁻¹)
\vec{v}	Vitesse (m.s ⁻¹)
ϕ_B	Flux magnétique (Wb)
ρ	Densité volumique de charge (C.m ⁻³)
σ	Densité surfacique de charge (C.m ⁻²)
C	Capacité électrique (F)
e	Force électromotrice (V)
i, I	Intensité électrique (A)
L	Auto-inductance (H)
m	Masse (kg)
n	Densité de particules (m ⁻³)
q, Q	Charge électrique (C)
R	Rayon de courbure (m)
R, r	Résistance électrique (Ω)
R_H	Constante de Hall (m ³ .C ⁻¹)
S	Surface (sa mesure en m ²)
T	Période (s)
T	Température (K)
t	Temps (s)
u ou U	Tension électrique (V)
V	Potentiel électrique (V)
W	Travail (J)
w	Densité d'énergie (J.m ⁻³)
ϵ_r	Permittivité diélectrique relative (sans unité)

Symboles mathématiques

def Relation de définition

\sim	Égal en ordre de grandeur
$A \gg B$	A très grand devant B
$A \ll B$	A très petit devant B
\bar{f}	Moyenne temporelle de $f(t)$
$\langle f \rangle$	Moyenne d'ensemble de f
$\frac{df}{dt}$	Dérivée première par rapport au temps
$\frac{d^n f}{dt^n}$	Dérivée n-ième par rapport au temps
$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$	Base cartésienne
(r, θ, z)	Coordonnées cylindriques
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$	Base cylindrique
(r, θ, φ)	Coordonnées sphériques
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$	Base sphérique
A_z	Composante suivant l'axe (Oz) : $A_z = \vec{A} \cdot \vec{u}_z$
$\int_{\mathcal{D}}$	Intégration sur un domaine \mathcal{D}
$\int_C \vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell}$	Circulation de \vec{A} le long du circuit C
$\iint_S \vec{A}(M) \cdot \vec{n} dS$	Flux d'un champ vectoriel \vec{A}
$\iiint_V f(M) d\tau$	Intégrale de volume
$\overrightarrow{\text{grad}} f$ ou $\vec{\nabla} f$	Gradient d'un champ scalaire
$\text{div} \vec{A}$ ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	Divergence d'un champ vectoriel
$\text{rot} \vec{A}$ ou $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$	Rotationne d'un champ vectoriel
$\Delta f = \nabla^2 f$	Laplacien scalaire
$\sum_{\text{couples } (i,j)} = \sum_i \sum_{j < i}$	Somme sur les couples (i, j) avec $i \neq j$



2023

femto-physique.fr/electromagnetisme